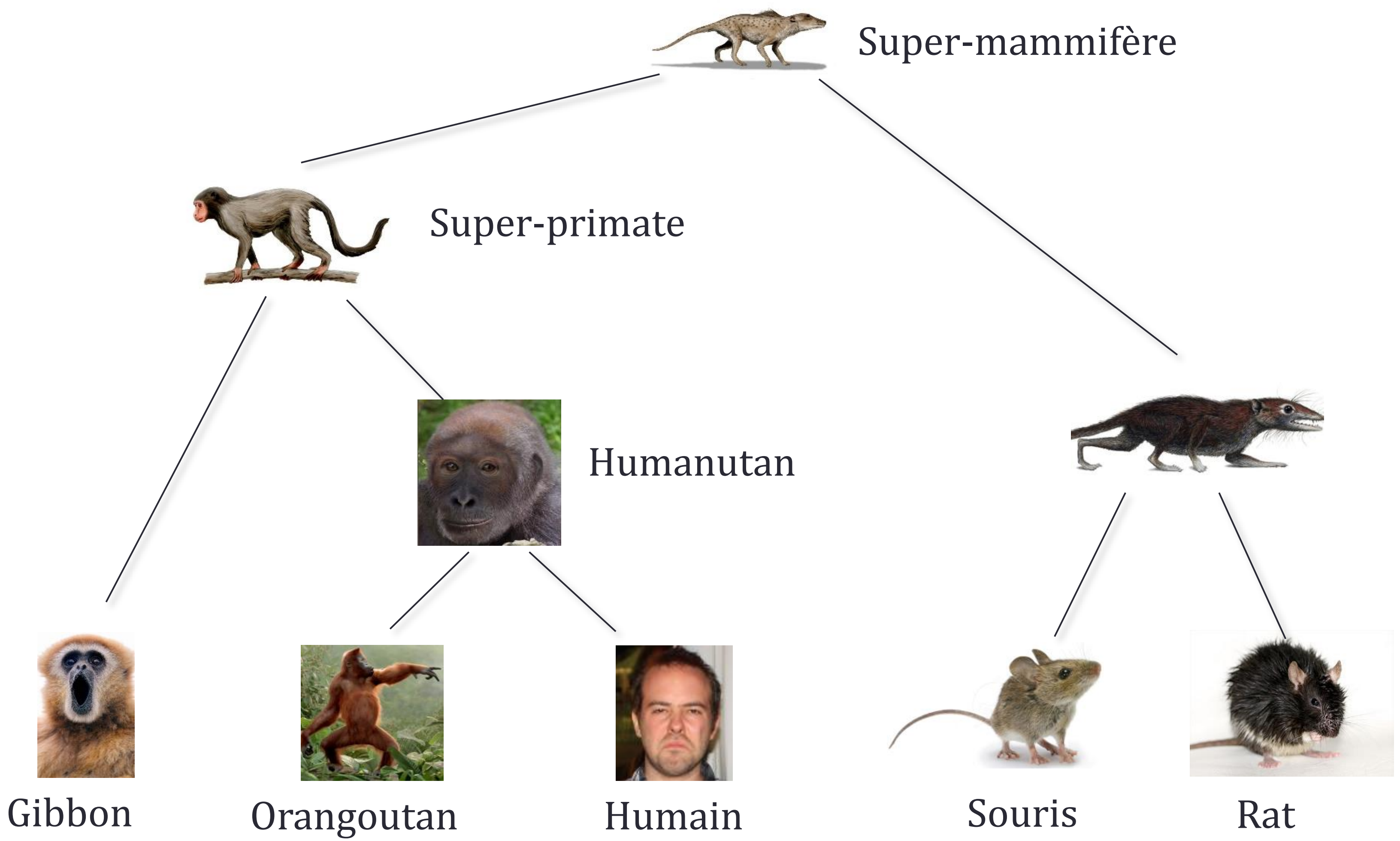
THÉORIE DES GRAPHES ET ÉVOLUTION : LES PUISSANCES DE FEUILLES

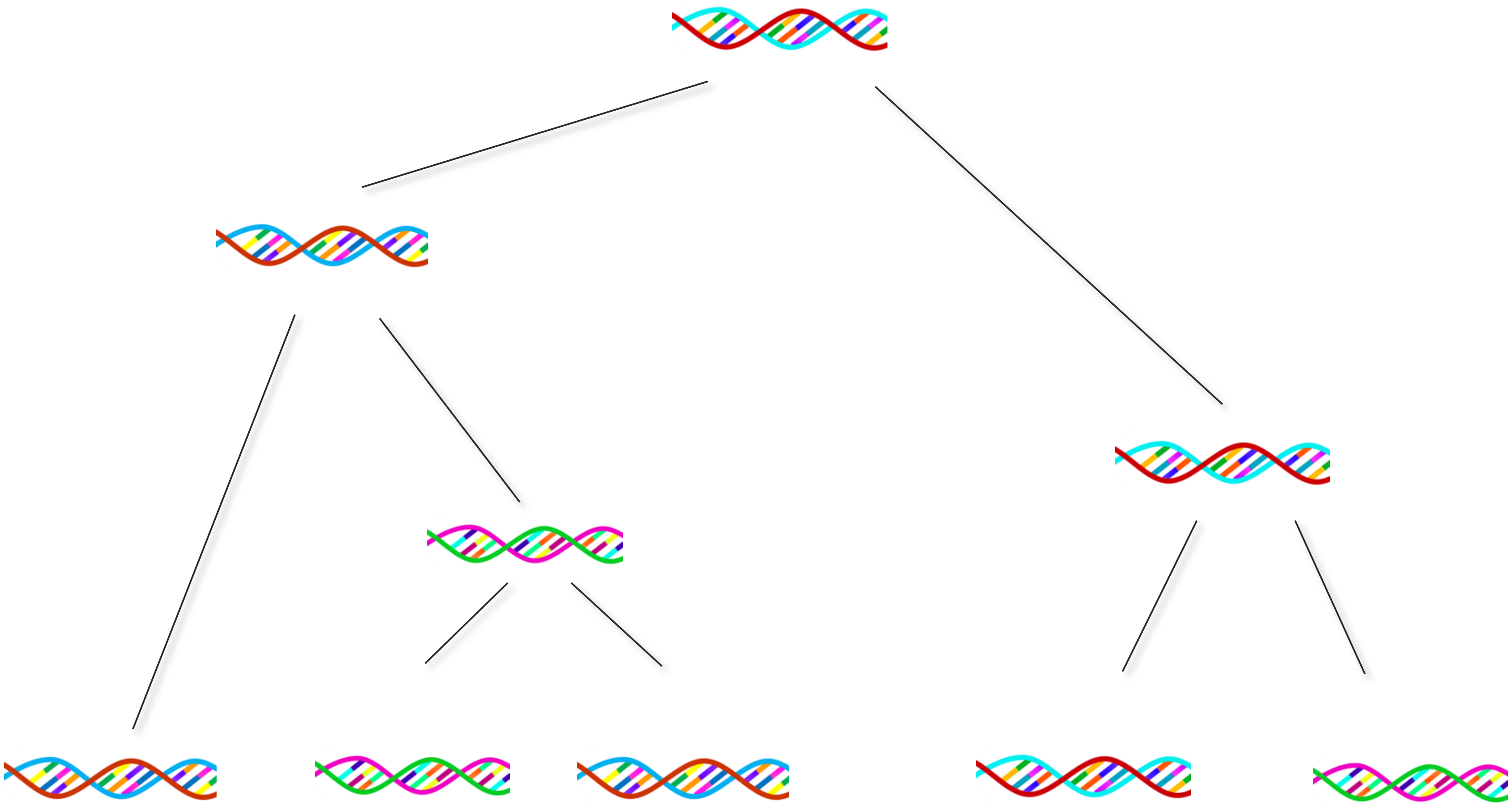
Manuel Lafond

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

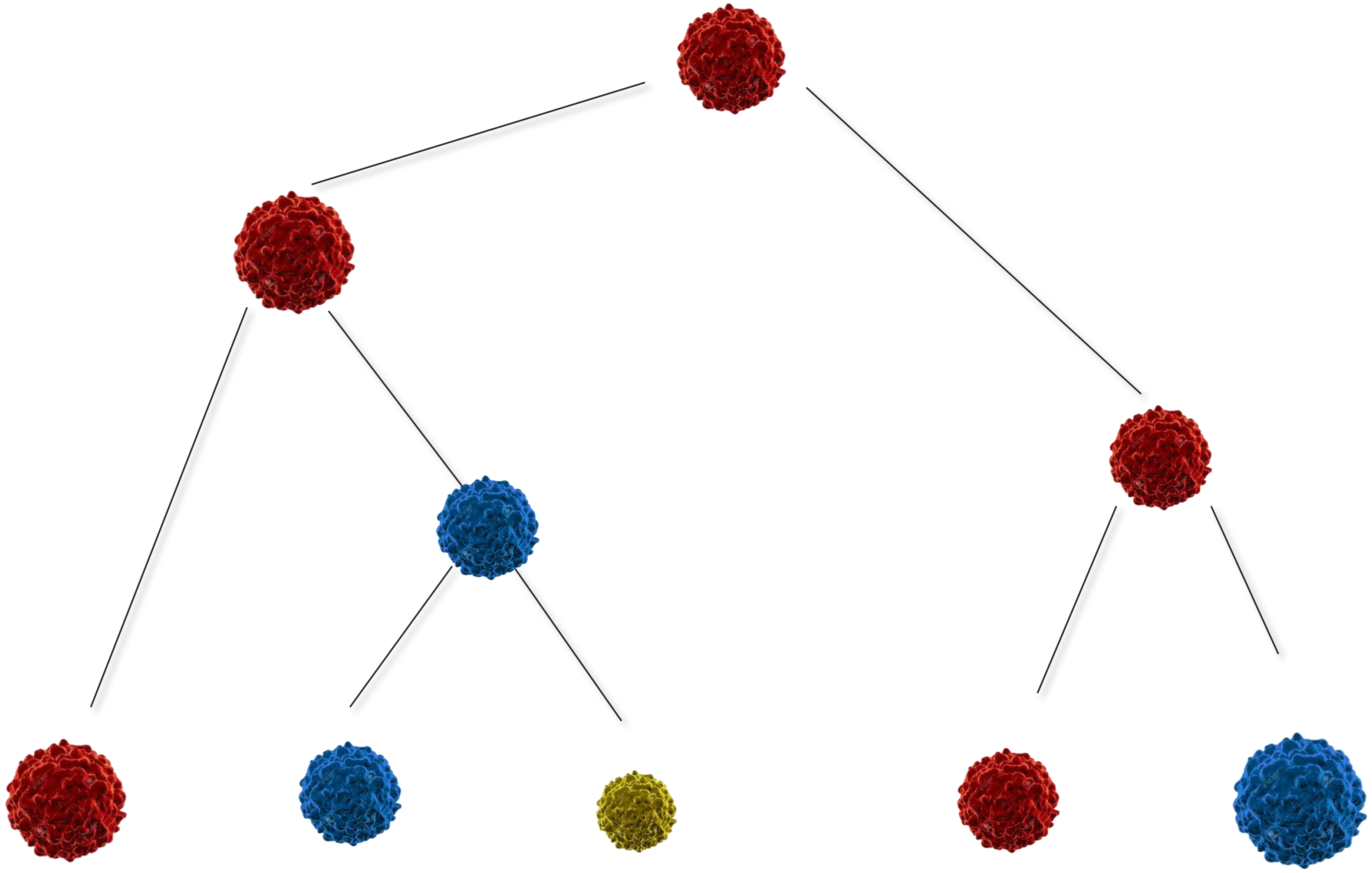
Motivations



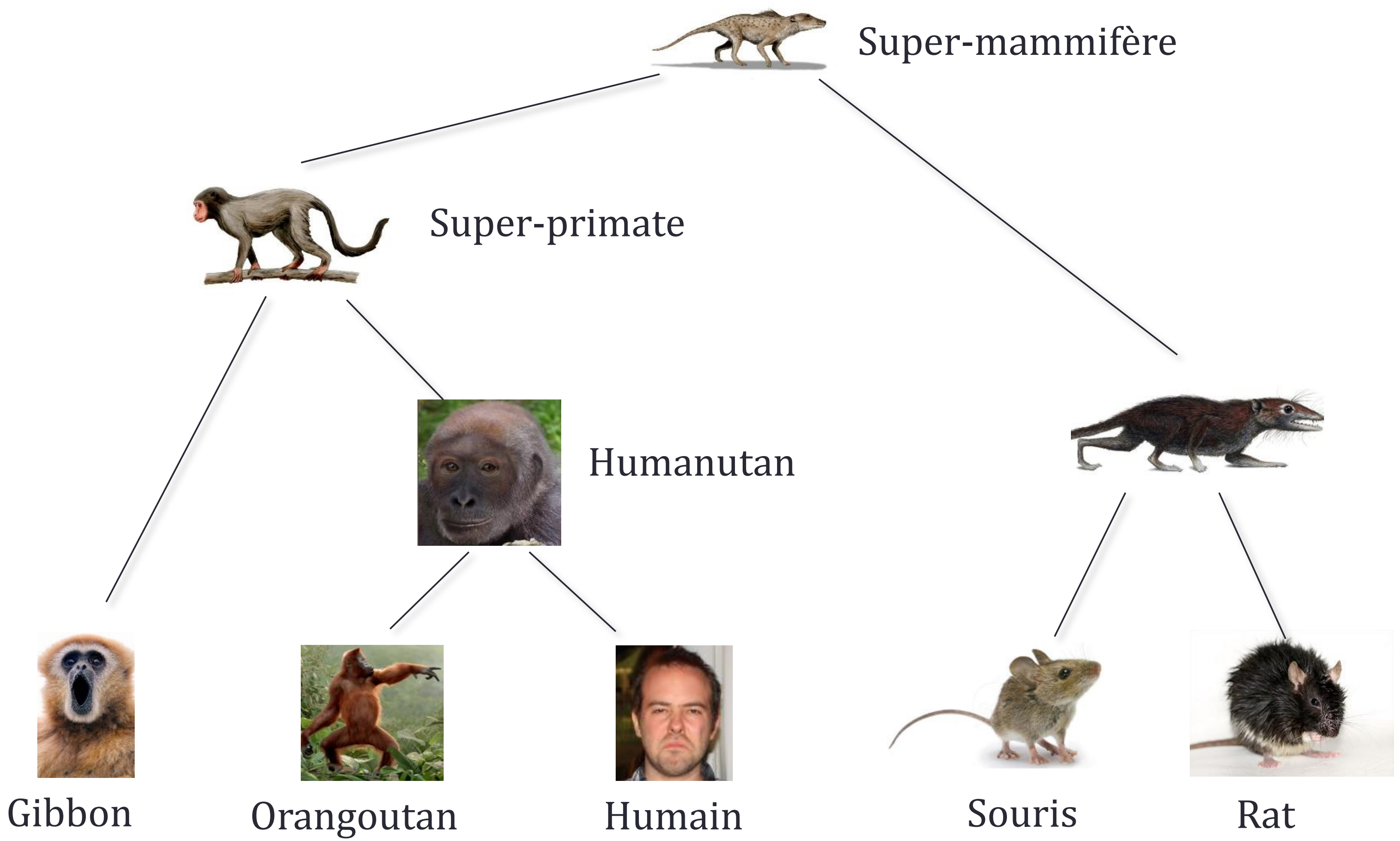
Motivations



Motivations



Motivations



Motivations


Gibbon


Orangoutan


Humain


Souris


Rat

Motivations

- Matrice de distances évolutives.
- Souvent bruitée.

	G	O	H	M	R
G	0	0.33	0.25	0.52	0.61
O		0	0.31	0.61	0.36
H			0	0.55	0.56
M				0	0.2
R					0


Gibbon


Orangoutan


Humain


Souris


Rat

Motivations

- Matrice de distances évolutives.
- Souvent bruitée.
- Notion de "Proche" vs "Loin"
  - établir un seuil

	G	O	H	M	R
G	0	0.33	0.25	0.52	0.61
O		0	0.31	0.61	0.36
H			0	0.55	0.56
M				0	0.2
R					0


Gibbon


Orangoutan


Humain


Souris


Rat

Motivations

- Matrice de distances évolutives.
- Souvent bruitée.
- Notion de "Proche" vs "Loin"
  - établir un seuil

	G	O	H	M	R
G	0	0.33	0.25	0.52	0.61
O		0	0.31	0.61	0.36
H			0	0.55	0.56
M				0	0.2
R					0

seuil = 0.5


Gibbon


Orangoutan


Humain


Souris


Rat

Motivations

- Matrice de distances évolutives.
- Souvent bruitée.
- Notion de "Proche" vs "Loin"
  - établir un seuil

	G	O	H	M	R
G	0	1	1	0	0
O		0	1	0	1
H			0	0	0
M				0	1
R					0


Gibbon


Orangoutan


Humain

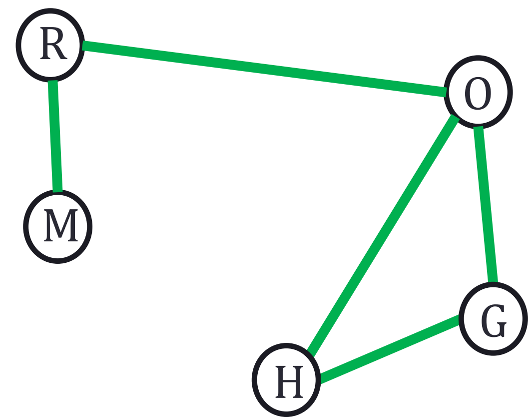

Souris


Rat

Motivations

- Matrice de distances évolutives.
- Souvent bruitée.
- Notion de "Proche" vs "Loin"
  - établir un seuil

	G	O	H	M	R
G	0	1	1	0	0
O		0	1	0	1
H			0	0	0
M				0	1
R					0



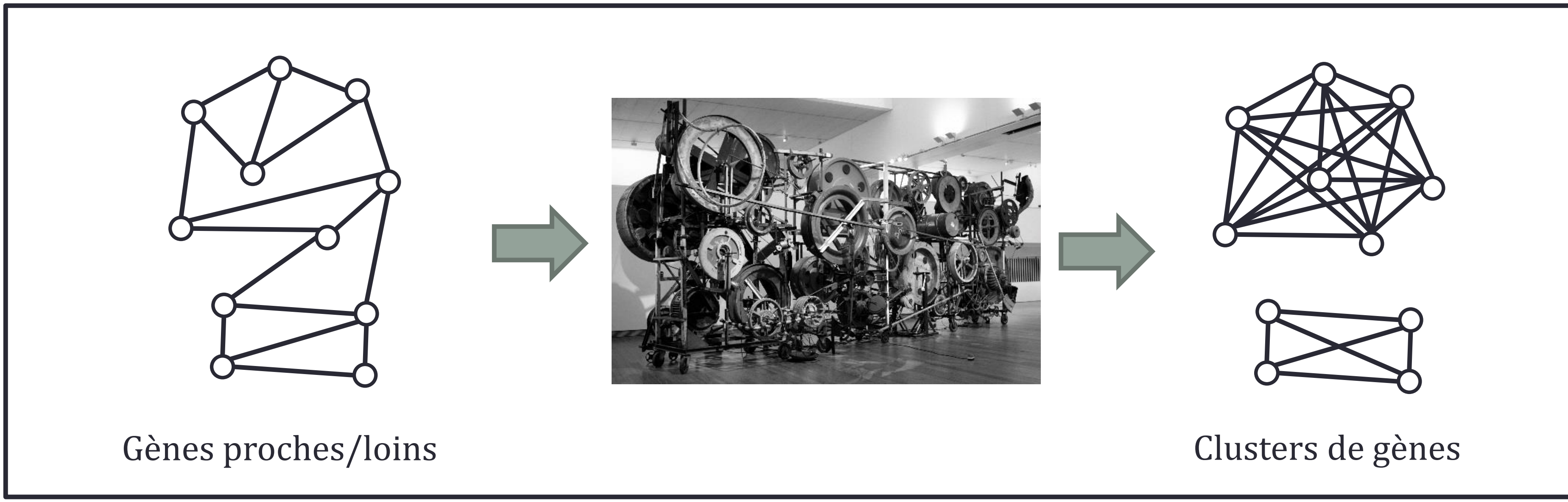

Gibbon


Orangoutan

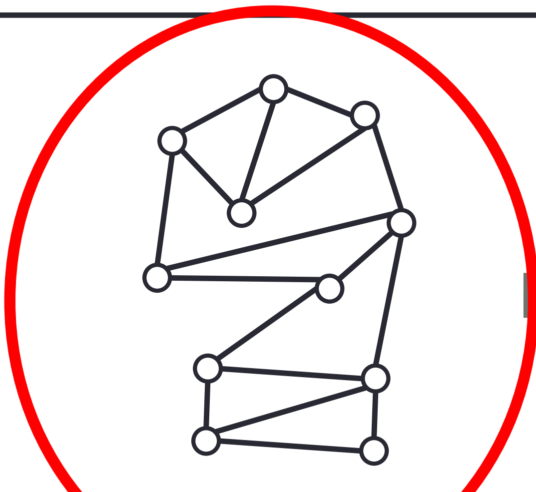

Humain

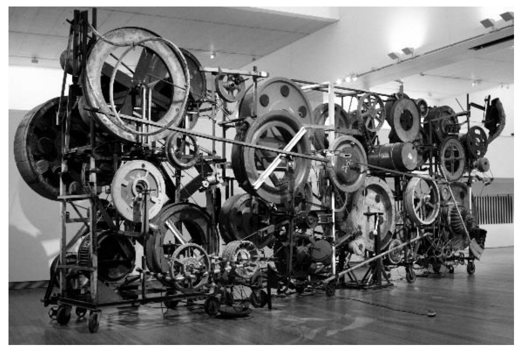

Souris

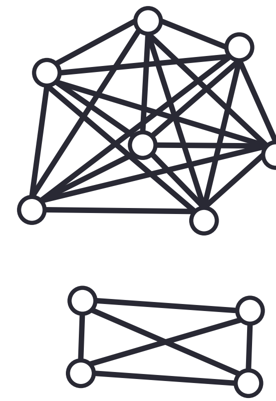

Rat


Gènes proches/loins
Clusters de gènes

Fiable?







Gènes proches/loins

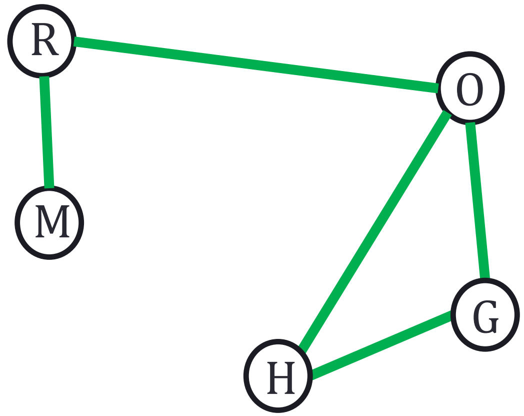
Clusters de gènes

Motivations

- Notre matrice "fait du sens" s'il existe un arbre évolutif qui distingue nos "proches" de nos "loins".
- Donc s'il existe un k et un arbre T avec $V(G)$ comme feuilles tels que

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow dist_T(u,v) \leq k$$

	G	O	H	M	R
G	0	1	1	0	0
O		0	1	0	1
H			0	0	0
M				0	1
R					0



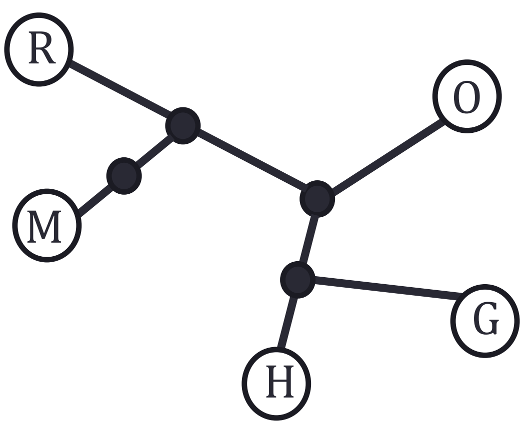
Motivations

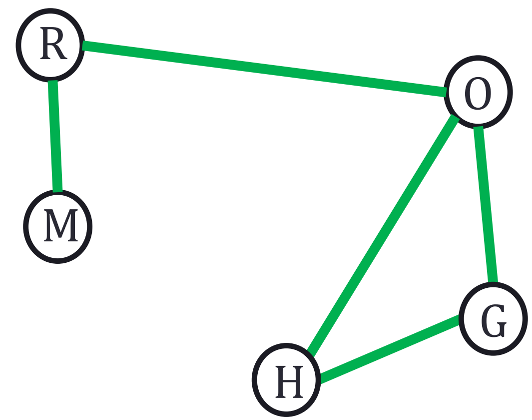
- Notre matrice "fait du sens" s'il existe un arbre évolutif qui distingue nos "proches" de nos "loins".
- Donc s'il existe un k et un arbre T avec $V(G)$ comme feuilles tels que

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow dist_T(u,v) \leq k$$

	G	O	H	M	R
G	0	1	1	0	0
O		0	1	0	1
H			0	0	0
M				0	1
R					0

$k = 3$



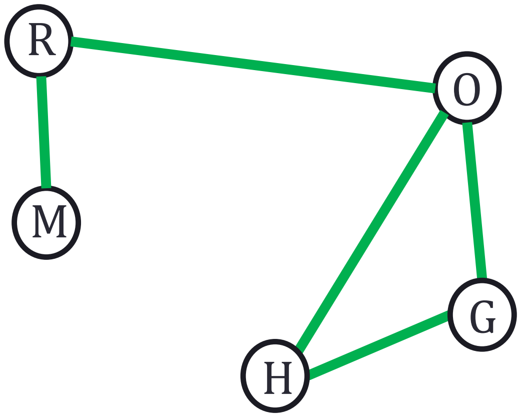


Motivations

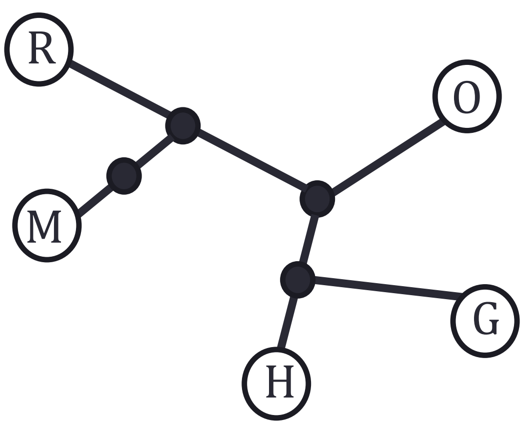
	G	O	H	M	R
G	0	1	1	0	0
O		0	1	0	1
H			0	0	0
M				0	1
R					0

- Notre matrice "fait du sens" s'il existe un arbre évolutif qui distingue nos "proches" de nos "loins".
- Donc s'il existe un k et un arbre T avec $V(G)$ comme feuilles tels que

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow dist_T(u,v) \leq k$$

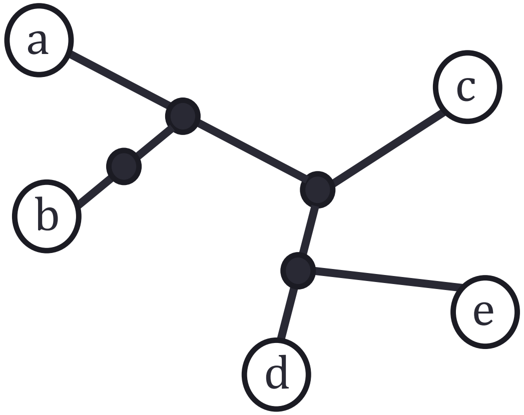


$k = 3$



Et maintenant, un peu de théorie des graphes

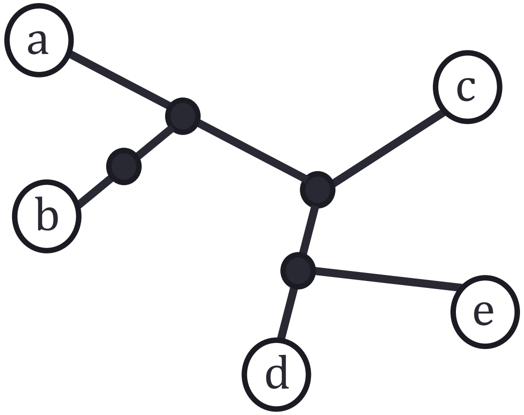
T :



Arbre T (graphe non-orienté connexe et acyclique)

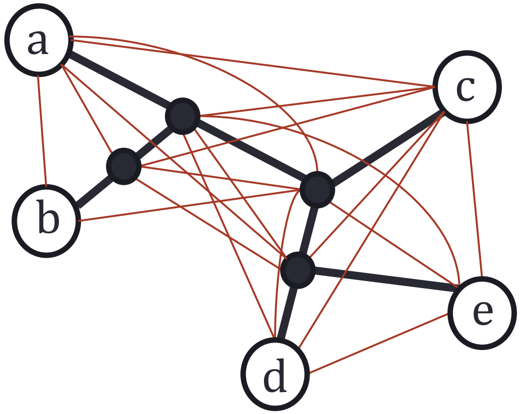
Feuilles étiquetées de **façon unique**

T :



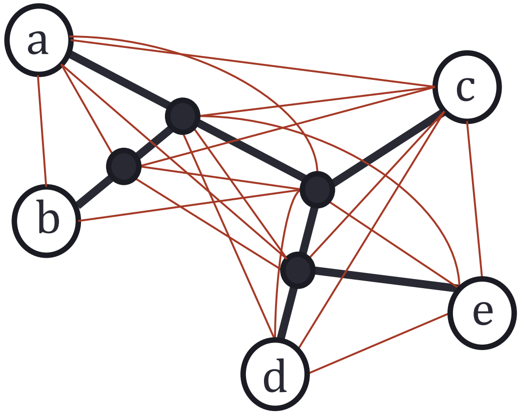
- T^k : la k-ième puissance de T
  - $V(T^k) = V(T)$
  - $uv \in E(T^k) \Leftrightarrow dist_T(u, v) \leq k$

T^3



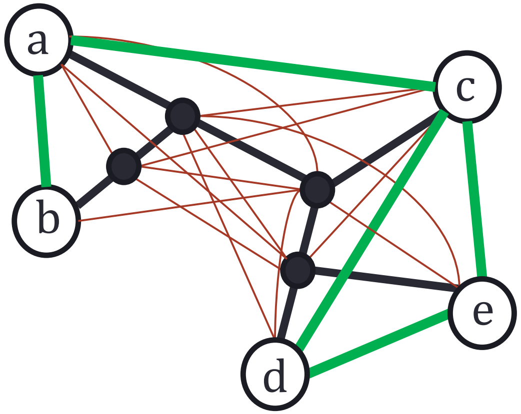
- On s'intéresse aux arêtes qui sont "apparues" entre les feuilles
  - L'ensemble des feuilles est dénoté $L(T)$.
- Et surtout, au graphe $T^k[L(T)]$ induit par ces feuilles.

T^3



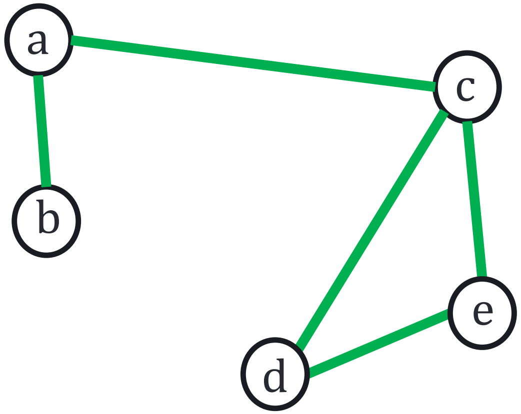
- On s'intéresse aux arêtes qui sont "apparues" entre les feuilles
  - L'ensemble des feuilles est dénoté $L(T)$.
- Et surtout, au graphe $T^k[L(T)]$ induit par ces feuilles.

T^3

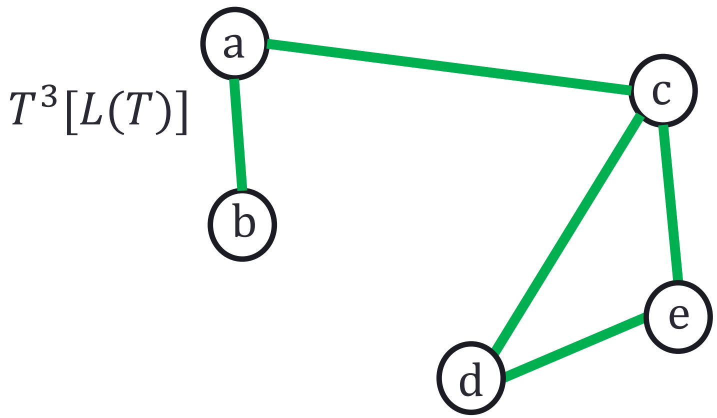


- On s'intéresse aux arêtes qui sont "apparues" entre les feuilles
  - L'ensemble des feuilles est dénoté $L(T)$.
- Et surtout, au graphe $T^k[L(T)]$ induit par ces feuilles.

$T^3[L(T)]$



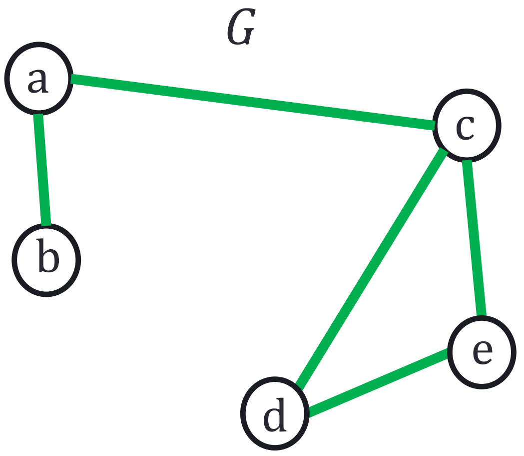
- On s'intéresse aux arêtes qui sont "apparues" entre les feuilles
  - L'ensemble des feuilles est dénoté $L(T)$.
- Et surtout, au graphe $T^k[L(T)]$ induit par ces feuilles.
- Le graphe résultant est appelé une ***k*-puissance de feuilles** (ou en anglais, ***k*-leaf power**)



Un 3-leaf power

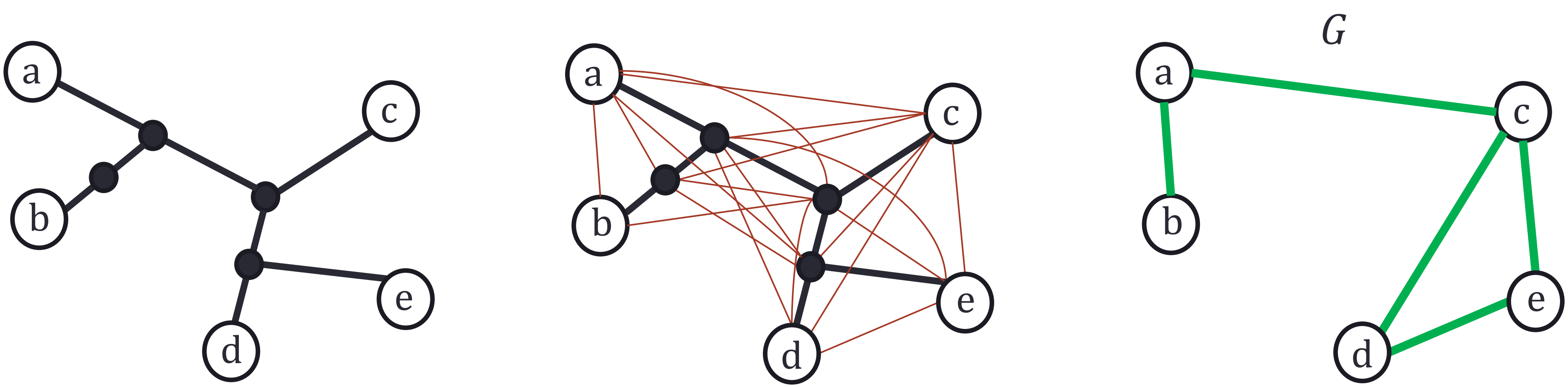
Définition

Un graphe G est une ***k-puissance de feuilles*** s'il existe un arbre T tel que $T^k[L(T)] = G$.



Définition

Un graphe G est une ***k*-puissance de feuilles** s'il existe un arbre T tel que $T^k[L(T)] = G$.



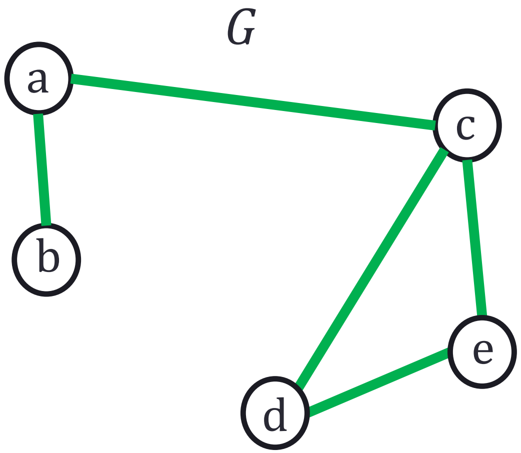
Définition

Un graphe G est une ***k-puissance de feuilles*** s'il existe un arbre T tel que $T^k[L(T)] = G$.

Problème 1

Trouver une caractérisation de la classe des ***k-puissances de feuilles*** (par exemple en terme de sous-graphes interdits).

?



Définition

Un graphe G est une ***k*-*puissance de feuilles*** s'il existe un arbre T tel que $T^k[L(T)] = G$.

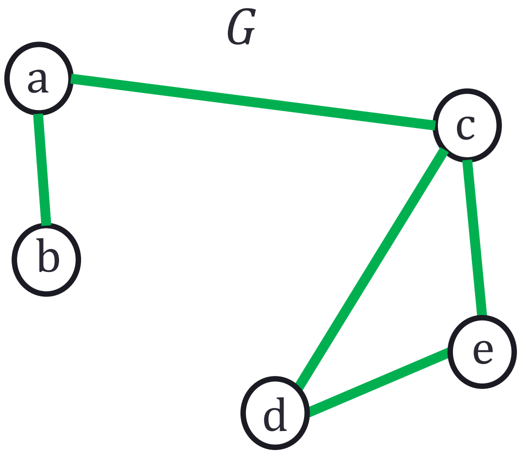
Problème 1

Trouver une caractérisation de la classe des ***k*-*puissances de feuilles*** (par exemple en terme de sous-graphes interdits).

Problème 2

Est-ce qu'il existe un algorithme en temps polynomial qui décide si un graphe G est une ***k*-*puissance de feuilles***?

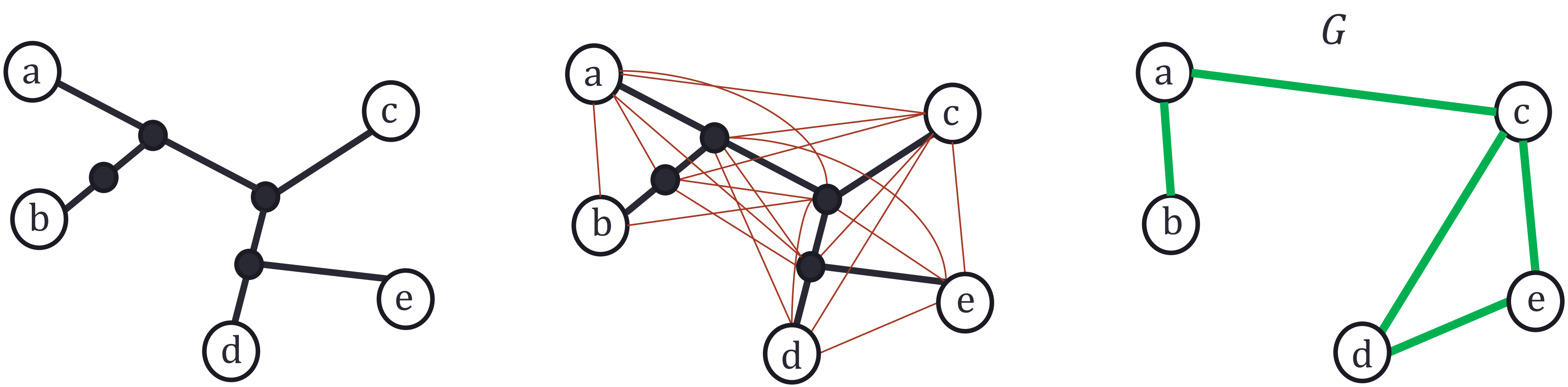
?



Définition

Dénotons par $LP(k)$ l'ensemble des graphes qui sont une ***k-puissance de feuilles***.

Un graphe G est une ***puissance de feuilles*** s'il appartient à $\bigcup_{k=1}^{\infty} LP(k)$.

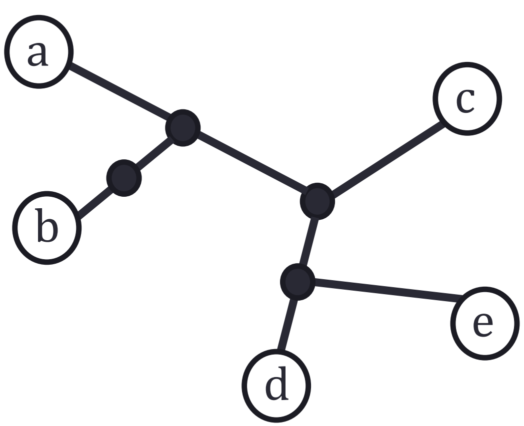


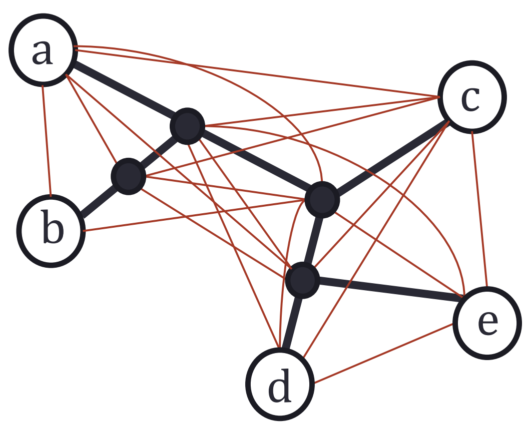
Définition

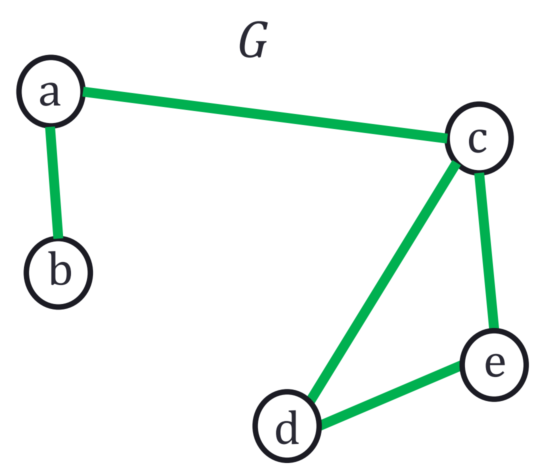
Dénotons par $LP(k)$ l'ensemble des graphes qui sont une ***k-puissance de feuilles***.

Un graphe G est une ***puissance de feuilles*** s'il appartient à $\bigcup_{k=1}^{\infty} LP(k)$.

En d'autres termes, G est un *leaf power* s'il existe un k tel que G est un *k-leaf power*.







Définition

Dénotons par $LP(k)$ l'ensemble des graphes qui sont une ***k-puissance de feuilles***.

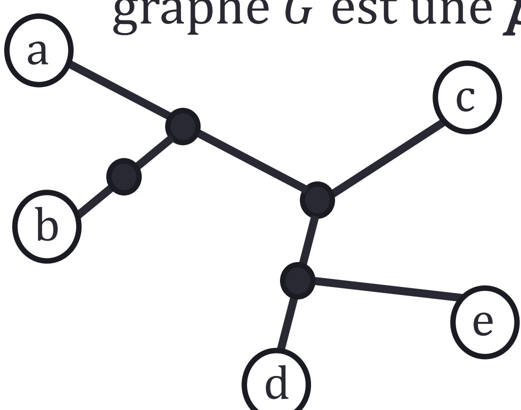
Un graphe G est une ***puissance de feuilles*** s'il appartient à $\bigcup_{k=1}^{\infty} LP(k)$.

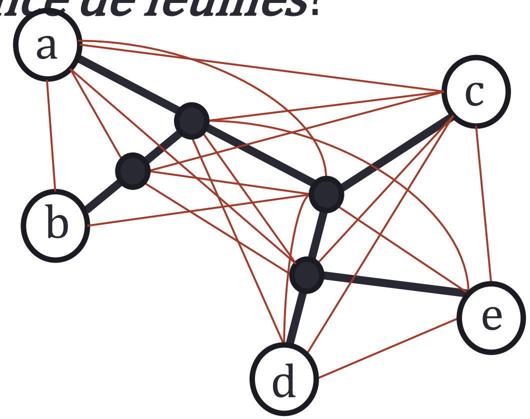
Problème 3

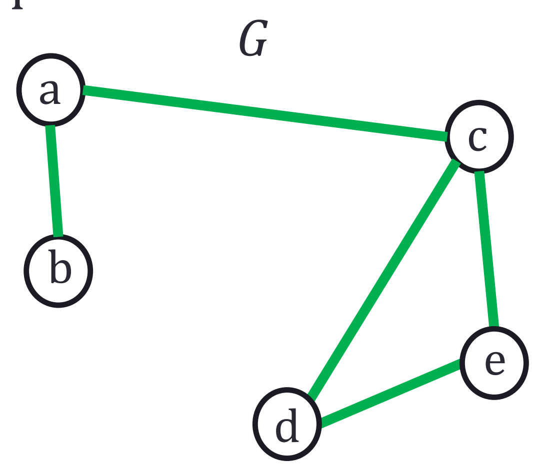
Trouver une caractérisation de la classe des ***puissances de feuilles*** (par exemple en terme de sous-graphes interdits).

Problème 4

Est-ce qu'il existe un algorithme en temps polynomial qui décide si un graphe G est une ***puissance de feuilles***?







Que sait-on sur les *k-puissances de feuilles*?

Les 2-puissances de feuilles:

<u>Proposition</u>

Un graphe G est une 2-puissances de feuilles si et seulement si toutes les composantes connexes de G sont des cliques.

Les 2-puissances de feuilles:

Proposition

Un graphe G est une 2-puissances de feuilles si et seulement si toutes les composantes connexes de G sont des cliques.

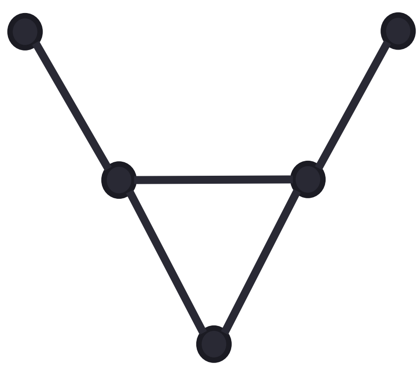
Définition (rappel)

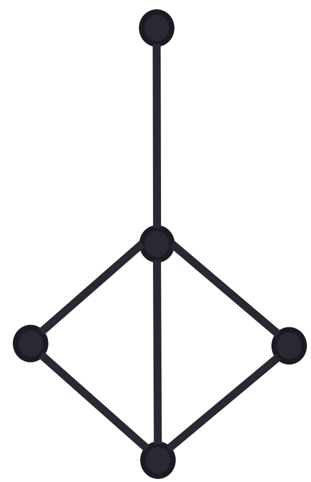
Un graphe G est une 2***-puissance de feuilles*** s'il existe un arbre T tel que $T^2[L(T)] = G$.

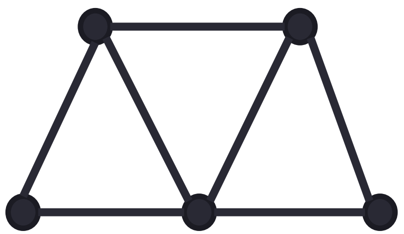
Les 3-puissances de feuilles :

<u>Théorème</u> [Dom, 2006][Rautenbach, 2006]

Un graphe G est une 3-puissance de feuilles si et seulement si il est **cordal** et ne contient pas de *taureau*, *dard* ou *gemme* comme sous-graphe induit.







Définition

Un graphe G est un **cordal** si tous ses cycles de longueur 4 ou plus ont une corde (i.e. un raccoucis).

**note à Manuel: donne des exemples!*

Définition

Un graphe G est un **cordal** si tous ses cycles de longueur 4 ou plus ont une corde (i.e. un raccoucis).

La classe des graphes cordaux est très étudiée en algorithmique.

Plusieurs problèmes deviennent polynomial sur ces graphes.

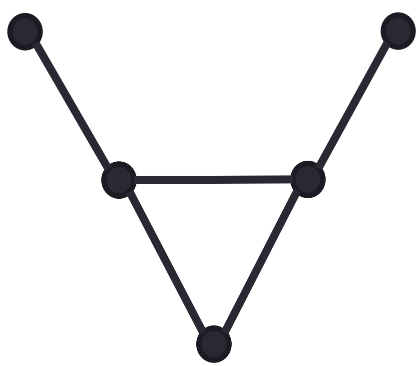
- Clique maximum
- Stable maximum
- Couverture par sommets (*vertex cover*)
- Couverture par cliques (*clique cover*)
- Nombre chromatique
- …

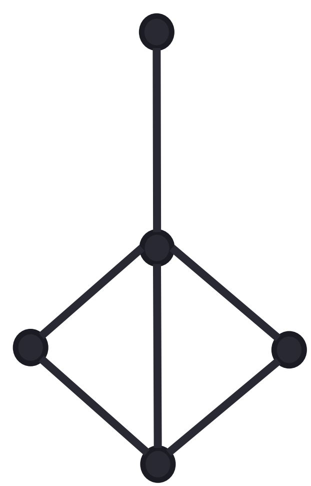
**note à Manuel: donne des exemples!*

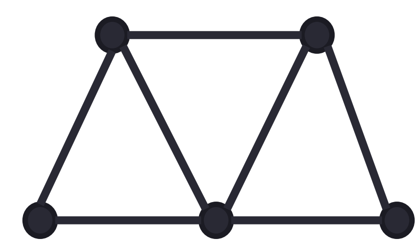
Les 3-puissances de feuilles :

<u>Théorème</u> [Dom, 2006][Rautenbach, 2006]

Un graphe G est une 3-puissance de feuilles si et seulement si il est **cordal** et ne contient pas de *taureau*, *dard* ou *gemme* comme sous-graphe induit.



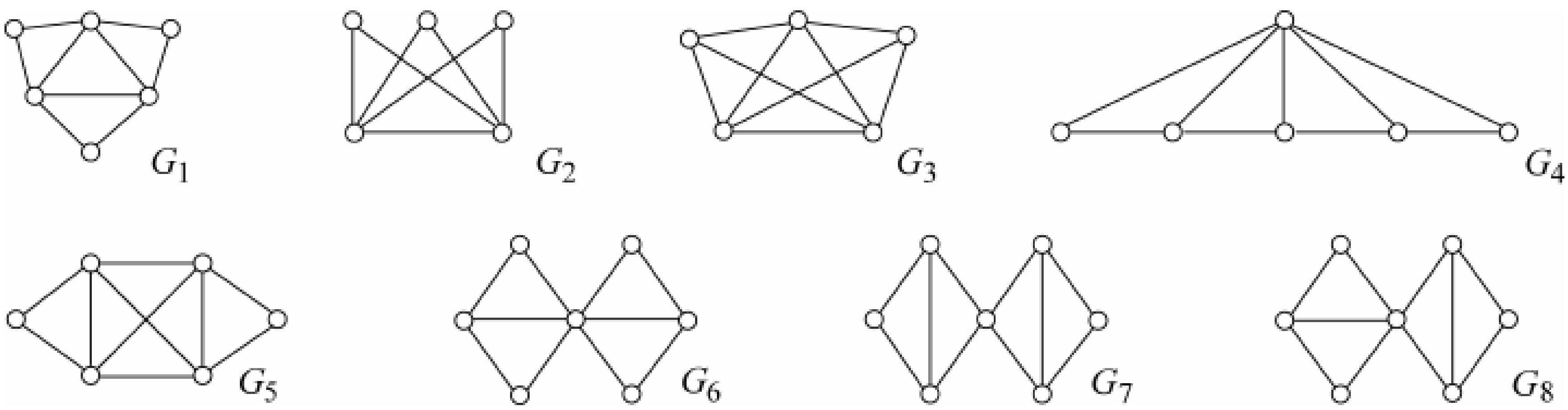




Les 4-puissances de feuilles:

Théorème [Brandstädt, 2008]

Un graphe G est une 4-puissance de feuilles si et seulement si il est **cordal** et ne contient pas un des ces graphes:



Les 5-puissance de feuilles:

<u>Conjecture</u>

Un graphe G est un 5-puissance de feuilles si et seulement si il est **cordal** et ne contient pas de sous-graphe induit dans X, où X est un ensemble fini de graphes.

Les k-puissances de feuilles:

Conjecture

Pour tout $k \geq 2$, il existe un ensemble fini X de graphes tel qu'un graphe G est une k-puissance de feuilles si et seulement si il est **cordal** et ne contient pas de sous-graphe induit dans X.

Quelques résultats algorithmiques

<u>Théorème</u> [Chang & al., 2007]

On peut decider en temps polynomial si un graphe est une 5-puissance de feuilles.

<u>Théorème</u> [Ducoffe, 2019]

On peut decider en temps polynomial si un graphe est une 6-puissance de feuilles.

Proposition

Un graphe G est une puissance de feuilles (pour n'importe quel k), **alors G est cordal.**

Proposition

Un graphe G est une puissance de feuilles (pour n'importe quel k), **alors** ***G*** **est fortement cordal** (*strongly chordal*).

Proposition

Un graphe G est une puissance de feuilles (pour n'importe quel k), **alors G est fortement cordal** (*strongly chordal*).

Un graphe est fortement cordal si, pour tout sous-graphe induit H de G, H a un sommet v tel que:

1. $N_H(v)$ est un clique
2. $N_H(v)$ peut être ordonnée en $N_H(v) = \{w_1, \ldots, wm\}$ de façon à ce que $N(w_1) \subseteq N(w_2) \subseteq \ldots \subseteq N(wm)$

où $N_H(v)$ denote l'ensemble des voisins de v dans le graphe H.

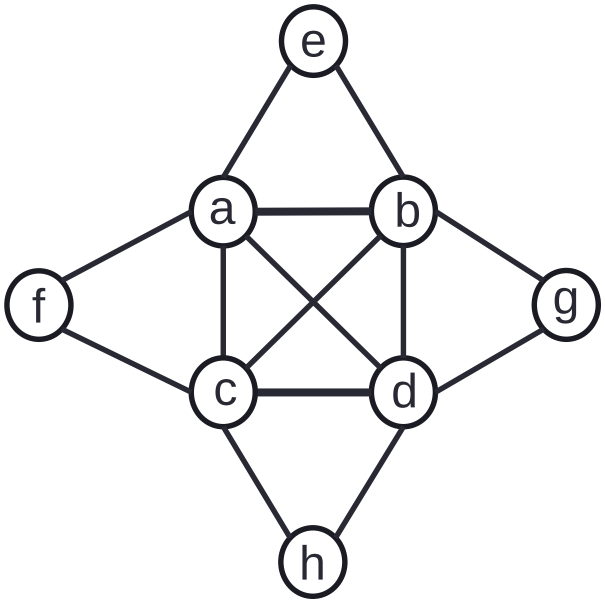
*Note à Manuel: allez, dessine-le!

Proposition

Un graphe G est une puissance de feuilles (pour n'importe quel k), **alors G est fortement cordal** (*strongly chordal*).

Un graphe est fortement cordal si et seulement si il est cordal et ne contient pas de *soleil* induit.

4 soleil



Proposition

Un graphe G est une puissance de feuilles (pour n'importe quel k), **alors G est fortement cordal** (*strongly chordal*).

Conjecture

Si G est fortement cordal, alors G est une puissance de feuilles.

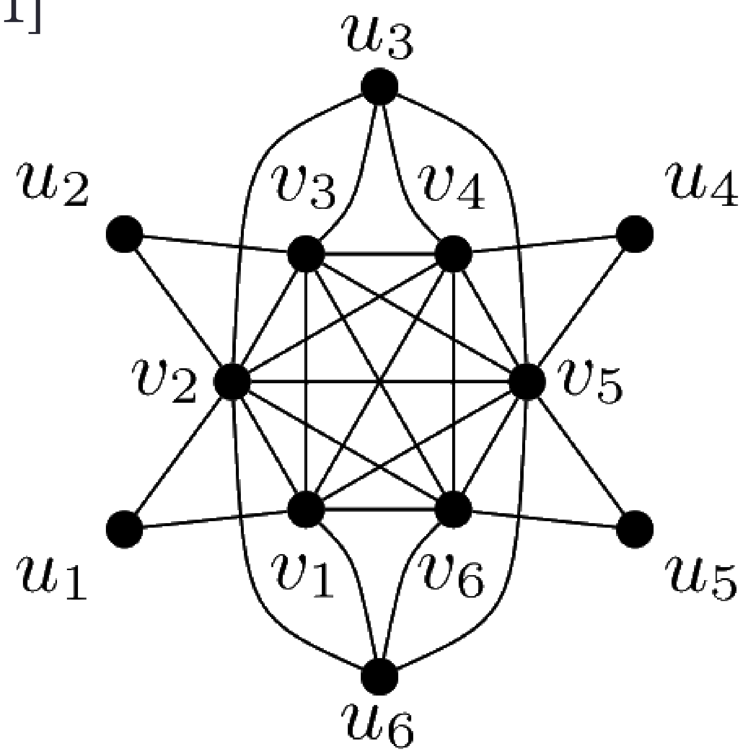
Proposition

Un graphe G est une puissance de feuilles (pour n'importe quel k), **alors G est fortement cordal** (*strongly chordal*).

~~Conjecture~~

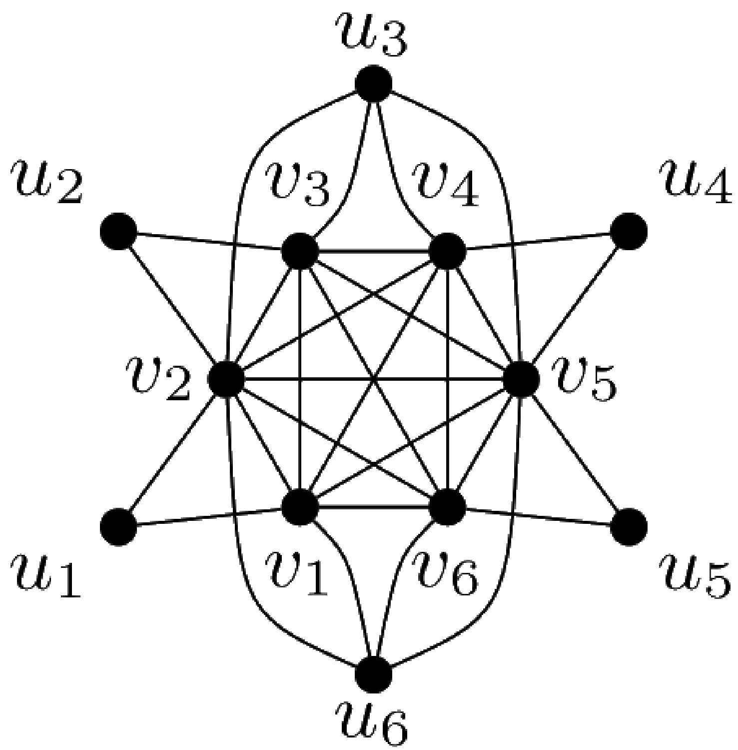
~~Si G est fortement cordal, alors G est une puissance de feuilles.~~

[Brandstädt & al., 2011]



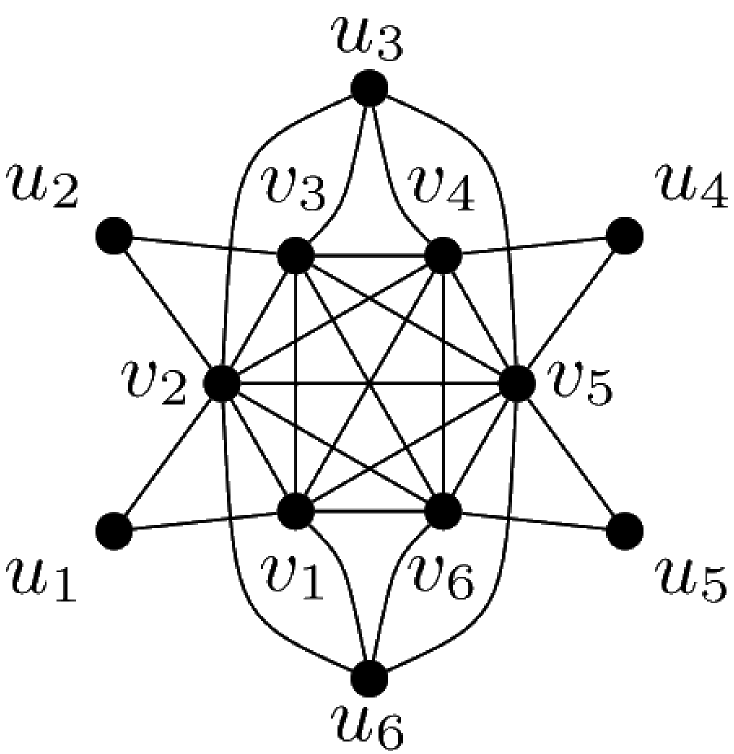
Conjecture

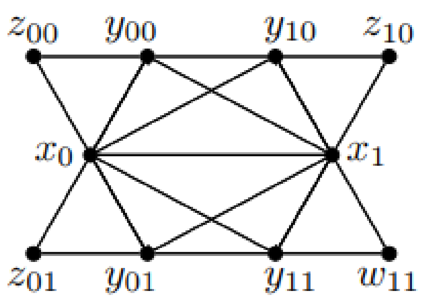
Ce graphe est le seul graphe fortement cordal qui n’est pas une puissance de feuilles.



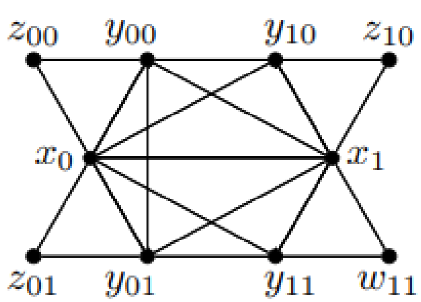
~~Conjecture~~

~~Ce graphe est le seul graphe fortement cordal qui n'est pas une puissance de feuilles.~~

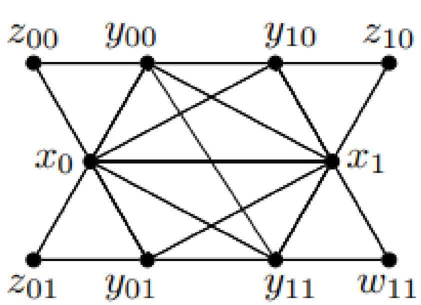




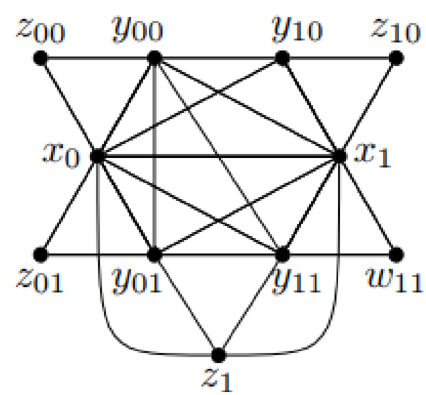
G_1



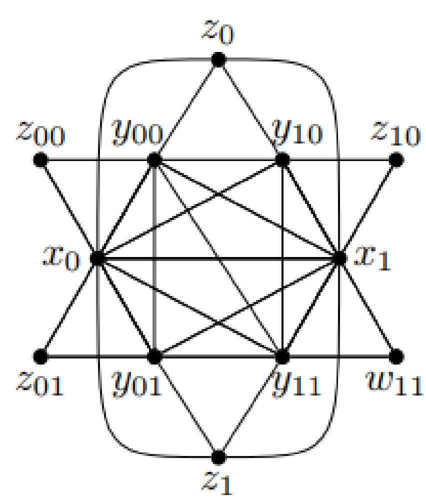
G_2



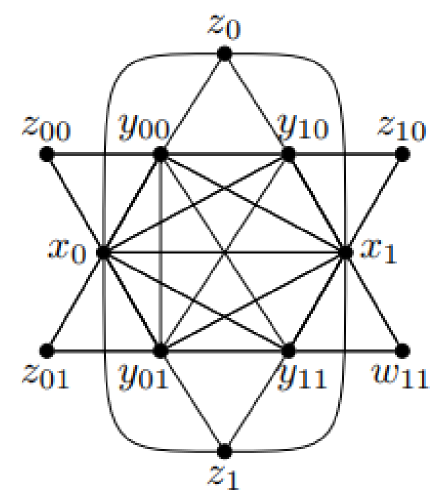
G_3



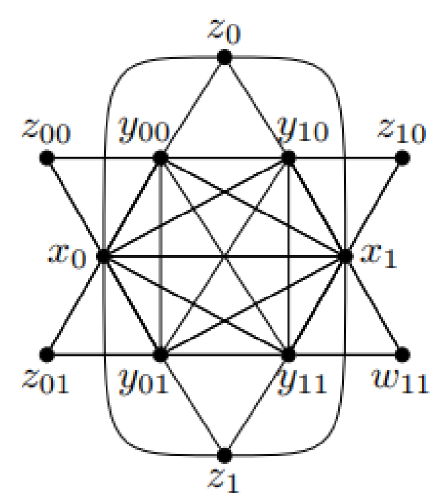
G_4



G_5



G_6



G_7

~~<u>Conjecture</u>~~

~~Ce graphe est le seul graphe fortement cordal qui n'est pas une puissance de feuilles.~~

[Nevries & Rosenke, 2015]

<u>Conjecture</u>

Ces 7 graphes sont les seuls graphes fortement cordaux qui ne sont pas des puissances de feuilles.

Ou du moins, il y a un nombre fini de tels graphes.

~~Conjecture~~

~~Ce graphe est le seul graphe fortement cordal qui n’est pas une puissance de feuilles.~~

[Nevries & Rosenke, 2015]

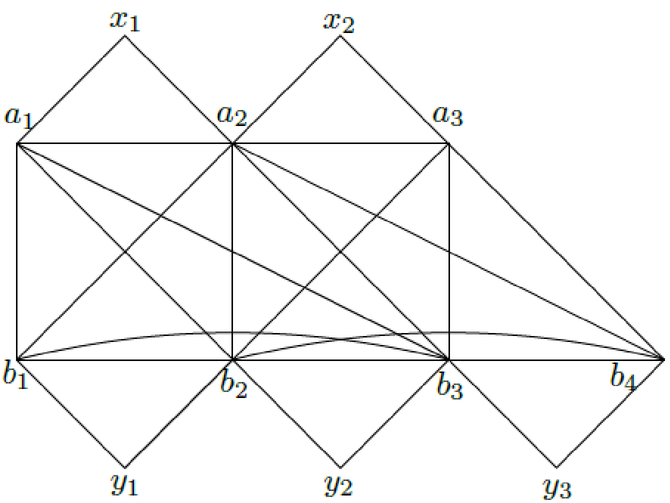
~~Conjecture~~

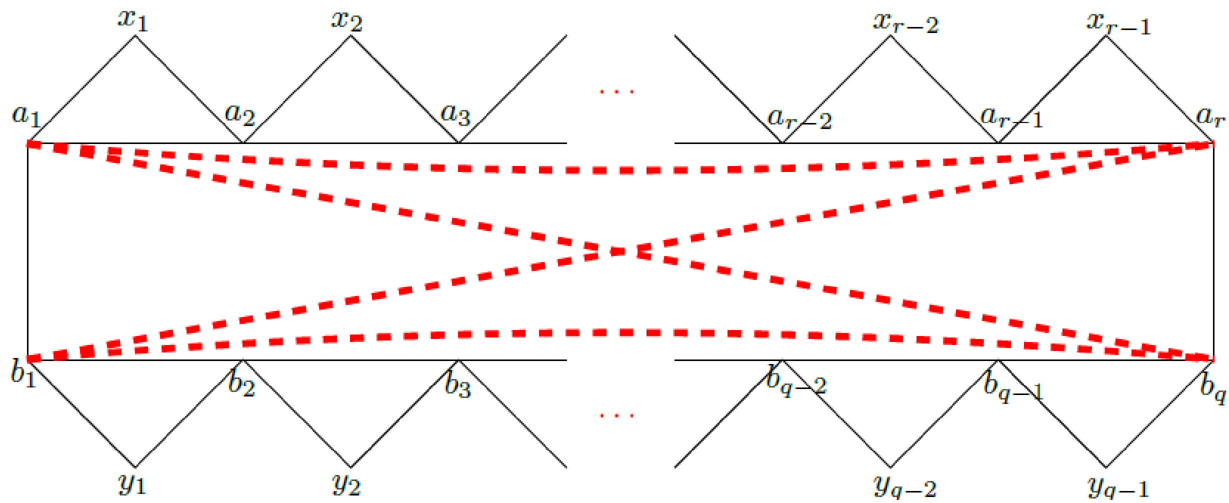
~~Ces 7 graphes sont les seuls graphes fortement cordaux qui ne sont pas des puissances de feuilles.~~

~~Ou du moins, il y a un nombre fini de tels graphes.~~

Théorème [L, 2017]

Il existe un infinité de graphes fortement cordaux qui ne sont pas des puissances de feuilles.


x_1
x_2
a_1
a_2
a_3
b_1
b_2
b_3
b_4
y_1
y_2
y_3


x_1
x_2
x_{r-2}
x_{r-1}
a_1
a_2
a_3
a_{r-2}
a_{r-1}
a_r
b_1
b_2
b_3
b_{q-2}
b_{q-1}
b_q
y_1
y_2
y_{q-2}
y_{q-1}

Conclusion

- Avancées lentes et difficiles...

- Il y a toujours 4 problèmes ouverts!

- Questions:
  - Ensemble fini de sous-graphes interdits pour chaque k ?
  - Algo en temps $O(n^k)$ pour reconnaître un k-leaf power?
  - Reconnaître un leaf power est-il NP-complet?