# Satisfaisabilité et cohérence

23 janvier 2024 11:31

Soit une FPO

$\forall x \cdot A$

Les occurrences de $x$ dans $A$ sont appelées des variables liées au $\forall$.

$\exists x \cdot A$

$x$ lié au $\exists$

ex: $\forall x \cdot (\text{Triangle}(x) \Rightarrow \text{Small}((x))$

Une variable qui n'est liée à aucun $\forall, \exists$ est appelée libre.

ex: $\text{Large}(y) \wedge \forall x \cdot (\text{Small}(x) \vee \text{LeftOf}(w, x))$

libre libre

Si plusieurs $\forall, \exists$ affectent une même var. $x$, $x$ est lié au $\forall, \exists$ le plus proche selon la portée de la formule.

$$\exists x \cdot (p(x) \wedge \forall x \cdot (q(x) \wedge \neg z(x)))$$

- Une FPO avec des variables libres n'a pas de valeur de vérité, ça dépend de leur valeur

SAUF si la formule est une tautologie (toujours vrai) ou une contradiction (toujours fausse)

| | |
|---|---|
| $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ | tautologie même si $p, q$ sont libres |
| $\neg p \Leftrightarrow p$ | contradiction |
| $p \wedge \text{Faux} \Leftrightarrow q \vee \text{Vrai}$<br>$\text{Faux} \Leftrightarrow \text{Vrai}$ | contradiction |
| $\forall x \cdot (x \vee \neg x \Rightarrow \text{Vrai})$ | tautologie |
| $\forall x \cdot (\exists y \cdot (x \Rightarrow y))$ | ? |
| $\forall x \cdot (x \Rightarrow y)$ | Dépend de $y$ |

## Assignation d'une var. libre

Soit $A$ une FPO avec var. libre $x$ et soit $c$ égal à 0 ou 1

On dénote par

$A[x := c]$

la formule obtenu en remplaçant chaque $x$ libre par $c$.

ex: $A: \ x \vee \forall v \cdot (x \Rightarrow v)$

la formule obtenue en remplaçant chaque x libre par c.

ex: $A : x \vee \forall y \cdot (x \Rightarrow y)$

$A[x := 0] : 0 \vee \forall y \cdot (0 \Rightarrow y)$ (vrai)

$A[x := 1] : 1 \vee \forall y \cdot (1 \Rightarrow y)$ (vrai)

$A : \neg x \vee \forall y \cdot (x \Rightarrow y)$

$A[x := 1] : \neg 1 \vee \forall y \cdot (1 \Rightarrow y)$

$0 \vee \forall y \cdot (1 \Rightarrow y)$ (faux)

Si on veut assigner plusieurs var. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on écrit

$$A[x_1 := c_1, x_2 := c_2, \ldots, x_n := c_n]$$

$A : x \vee \neg y \vee x \wedge y \wedge \forall x \cdot (\neg x \vee y)$

$A[x := 1, y := 0]$

$\rightarrow 1 \vee \neg 0 \vee 1 \wedge 0 \wedge \forall x \cdot (\neg x \vee 0)$

---

## Valuation

Une valuation d'une formule est une assignation de toutes ses vars. libres.

- Une valuation de A est vrai ou fausse, sans ambiguité.

$A : x_1 \wedge \neg x_2$

$A[x_1 := 0]$ n'est pas une valuation

$A[x_1 := 0, x_2 := 0]$ est une valuation qui évalue à faux

$A[x_1 := 1, x_2 := 0]$ est une valuation, évalue à vrai

---

## Modèle et satisfaisabilité

- Si $V = [x_1 := c_1, x_2 := c_2, \ldots, x_n := c_n]$ est une assignation telle que

$A[V]$

définit chaque var. libre ($V$ est valuation) et que $A[V]$ est vrai, on dit que $V$ satisfait $A$.

ex: $A : x_1 \vee \neg x_2$

$V = [x_1 := 0, x_2 := 0]$
alors $V$ satisfait $A$.

- $A$ est satisfaisable s'il existe une valuation qui satisfait $A$.

- Une valuation qui satisfait $A$ est appelée un modèle pour $A$.
  → $A$ est satisfaisable s'il y a au moins un modèle pour $A$.

$$A = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3)$$

$x_3 := 0$
$x_1 := 0$

Est-ce que $A$ admet un modèle ?

Essayons : disons $x_1 := 0$

$\rightarrow (\neg 0 \vee x_2) \wedge \cdots \wedge (0 \vee x_3)$
ceci force $x_3 := 1$

$\rightarrow (\neg 0 \vee x_2) \wedge (\neg 0 \vee 1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg 1) \wedge (0 \vee 1)$
ceci force $x_2 := 0$
$(\neg 0 \vee 0) \wedge (\neg 0 \vee 1) \wedge (\neg 0 \vee \neg 1) \wedge (0 \vee 1)$
$1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1$
$\longrightarrow$ Vrai

$V = [x_1 := 0, x_2 := 0, x_3 := 1]$ est un modèle pour $A$.