Ensembles et relations (suite)

13 février 2024 10:27

- $S = T$ si $\forall x \cdot (x \in S \Leftrightarrow x \in T)$

  fonctionne si les elt de S et T sont "atomique"

  $S = \{1,2,3\}$ $T = \{3,2,1\}$

  $S = T$ est vrai

- S et T pourraient contenir des ensembles

  $S = \{1, \{1,2\}, \emptyset\}$ $T = \{\emptyset, 1, \{1,2\}\}$

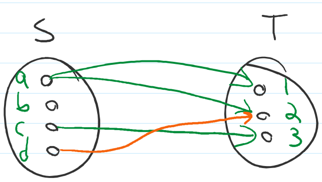
  $S = T$

  On dira que $S = T$ si

  → $S \subseteq T$ et $T \subseteq S$

Relations

Concept permettant de lier des paires d'objets



$\{(a,1), (a,2), (c,3), (d,2)\}$

Soit S et T deux ensembles, et $x \in S$, $y \in T$.
On dénote le fait que x est lié à y par
(x,y) // couple, $\neq (y,x)$
Certains dénotent $x \mapsto y$

- Produit cartésien

  $S \times T$: ensemble de tous les couples possibles de S vers T

  $S \times T = \{(x,y) \mid x \in S \wedge y \in T\}$

- Relation

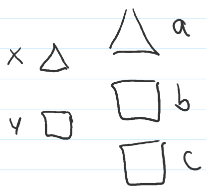
  → • Sous-ens. du produit cartésien

  R est une relation de S vers T si

  $R \subseteq S \times T$

ex: Tarski-UdeS

$$AGauche = \{ (x,y) \mid LeftOf(x,y) \}$$



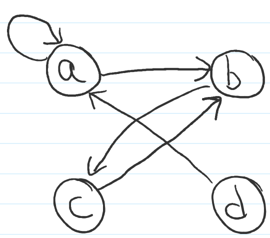
$$= \{ (x,a), (x,b), (x,c), (y,a), (y,b), (y,c) \}$$

$$MemeTaille = \{ (x,y) \mid SameSize(x,y) \}$$
$$= \{ (x,y), (a,b), (a,c), (b,c), (y,x), (b,a), (c,a), (c,b), (x,x), (y,y), (a,a), (b,b), (c,c) \}$$

- Une relation de S vers S est appelée homogène

On peut les visualiser avec un graphe
- sommet : éléments de S
- arêtes : flèche (x,y) : $x \longrightarrow y$

$R = \{ (a,b), (a,a), (c,b), (b,c), (d,a) \}$ $S = \{a,b,c,d\}$



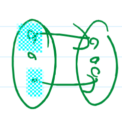
Domaine d'une relation

Soit $R \subseteq S \times T$

- Domaine

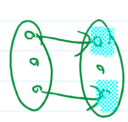
dom(R) = Tous les $x \in S$ qui sont dans au moins un lien

$$dom(R) = \{ x \mid x \in S \wedge \exists y \cdot ((x,y) \in R) \}$$



- Codomaine (range)

$$ran(R) = \{ y \mid y \in T \wedge \exists x \cdot (x,y) \in R) \}$$



- Relation d'identité

- **Relation d'identité**

  Soit S un ensemble.

  $$id(S) = \{ (x,x) \mid x \in S \}$$

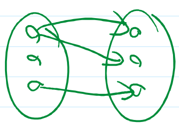
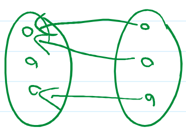
  Parfois, on dénote $id(S) = S^0$

- **Inverse**

  Soit $R \subseteq S \times T$

  On définit l'inverse de R par

  $$R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$$

  R  R^{-1} 

Types de relations (homogènes)

Soit $R \subseteq S \times S$ une relation. Alors, R est :

- **Réflexive** si tout $x \in S$ est en lien avec lui-même.
  si $\forall x \cdot ((x,x) \in R)$

- **Symétrique** si (x,y) en lien implique (y,x) en lien
  si $\forall x,y \cdot ((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)$

- **Transitive** : si x lié à y et y lié à z, alors x lié à z
  si $\forall x,y,z \cdot ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$

si $\forall x,y,z\ ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$

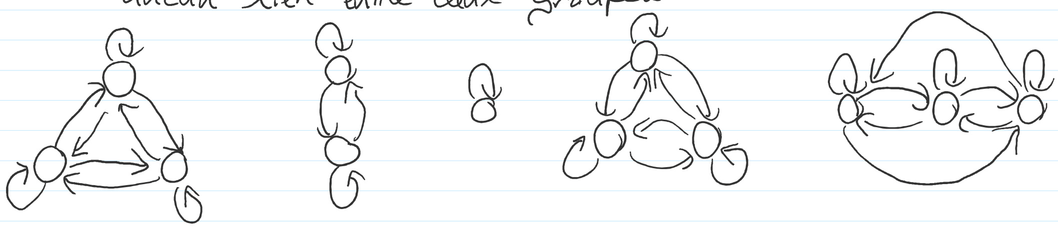
- <u>Relation d'équivalence</u>

  R est une relation d'équiv. si elle est réflexive, symétrique et transitive

Si R est une rel. d'équiv., alors on peut partitionner les éléments en "groupes similaires", qu'on appelle des classes d'équivalence.

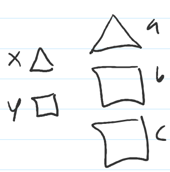
Dans un groupe:

- tous les liens possibles dans le groupe sont présents
- aucun lien entre deux groupes



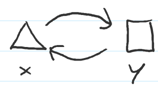
Pour montrer qu'une relation R est rel. d'équiv., il faut argumenter qu'elle est réflexive, symétrique, transitive.

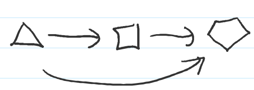
ex:



$\text{MemeTaille} = \{(x,y) \mid \text{SameSize}(x,y)\}$

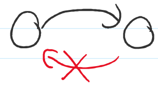
Réflexive: 

Symétrique: 

Transitive: 

- <u>Asymétrique</u>: si lorsque x est lié à y, y n'est PAS lié à x

si $\forall x,y \bullet ((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R)$



• **Antisymétrique**: si la seule façon d'avoir (x,y) et (y,x) en même temps est $x = y$

si $\forall x,y \cdot ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y)$

ex: $ppq = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge (x<y)\}$

$(2,3) \in ppq \quad (3,10) \in ppq \quad (10,3) \notin ppq$

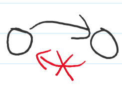
Réflexif ? Non. car $1 < 1$ est faux donc $(1,1) \notin ppq$

Symétrique? Non. car $(1,2) \in ppq$ mais $(2,1) \notin ppq$

Transitif ? Oui. Si $x<y$ et $y<z$, alors $x<y<z \Rightarrow x<z$

ex: $(1,2) \in ppq \quad (2,10) \in ppq \Rightarrow (1,10) \in ppq$

Asymétrique? Oui. Si $x<y$, alors $y<x$ est faux.



Antisymétrique? $\forall x,y \cdot (\underbrace{(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R}_{\text{avec } <\text{, toujours faux}} \Rightarrow x = y)$

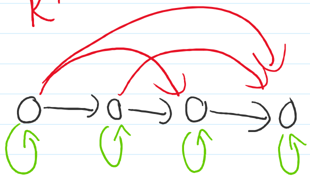
$\Rightarrow$ l'implication est toujours vraie

$\Rightarrow$ oui, c'est anti-symétrique

• Fermeture transitive

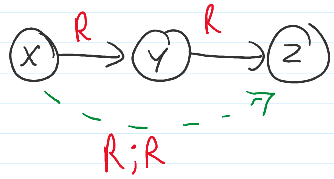
$R^+ \qquad R^*$

R^+

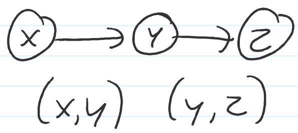


· Composition de relations (homogènes) S vers S

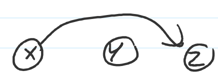
$$R;R = \{ (x,z) \mid \exists y \cdot ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \}$$

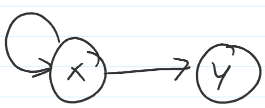


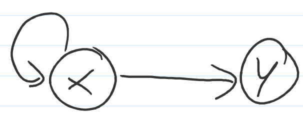
$(x,z) \in R;R$

R: 

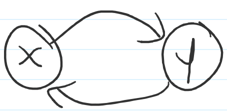
$R;R : \{ (x,z) \}$

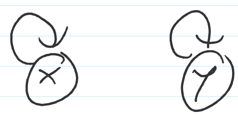


R: 

R;R : 

$[(x,x) \wedge (x,y)]$

R: 

R;R : 

$R;R = \{ (x,x), (y,y) \}$

On écrit parfois $R;R = R^2$

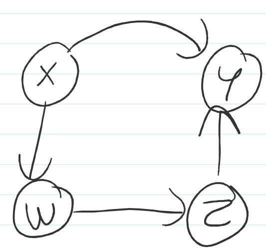
Ceci permet de définir R^n.

$R^0 = id(R) = \{ (x,x) \mid x \in S \}$ ← S ensemble sur lequel R est défini

$R^1 = R$

$R^2 = R;R$

$R^3 = R^2;R$



$(x,y) \in R^3$

⋮

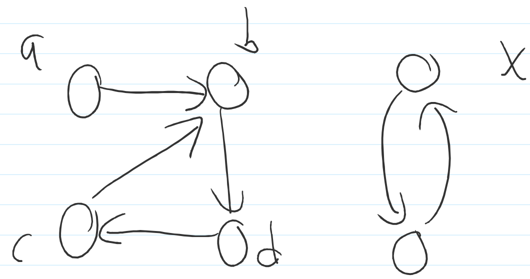
$R^n = R^{n-1};R$ → (x,y) tels que x peut atteindre y en exactement atteindre y en exactement n étapes (un tel chemin $\exists$)

R^+ = fermeture transitive

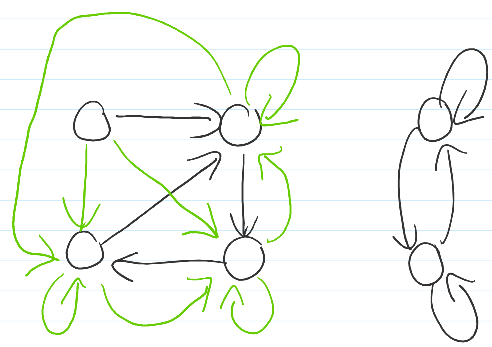
$= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$ (à l'infini)

$= \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ // union itérée

R



R^+



R^* = fermeture transitive et réflexive

$R^* = R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup \ldots$

$= \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

// comme R^+, avec tous les liens