Maths discrètes

12 mars 2024 10:25

$p =$ n est pair
$q =$ n^2 est pair

$p \Rightarrow q$ n est pair $\Rightarrow$ n^2 est pair

- Reste de la session: sur papier
  pas de logiciel
  langage Latex → rédaction de preuves
  → overleaf

- Techniques de preuve
  - ↳ preuve directe
  - ↳ preuve par contradiction
  - ↳ preuve par contraposée
  - ↳ preuve par induction

- Preuve formelle
  - ce qu'on a vu
  - chaînes de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$
  - arbres de preuve

- Preuve en langue naturelle
  - raisonnement logique exprimé en phrases et symbole lorsque nécessaire.
  - destiné aux humains.
  - rester rigoureux et prouver les énoncés hors de tout doute.
  - ne pas s'en remettre à des exemples (sauf si ça prouve ce qu'il faut)

- Preuve directe

  Séquence de déductions qui démontrent l'énoncé.
  Souvent utile pour des $\Rightarrow$
  Pour prouver $A \Rightarrow B$

  $$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow B$$

Théorème: la somme de deux entiers pairs est paire.

$$(\forall a, b \cdot ((a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge a \% 2 = 0 \wedge b \% 2 = 0) \Rightarrow \quad)$$

$$a \% 2 = 0 \land b \% 2 = 0) \Rightarrow (a+b) \% 2 = 0) \quad)$$

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que a et b sont pairs.
Puisque a est pair, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$a = 2k$$
De la même façon, il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que
$$b = 2h$$
La somme $a+b$ donne
$$a+b = 2k + 2h = 2(k+h)$$
qui est un multiple de 2.
Donc la somme de 2 nombres pairs quelconques donne un nombre pair. ∎ q.e.d, fin de la preuve

Soit S un ensemble. On définit

$\mathbb{P}(S)$ comme l'ensemble des sous-ensembles de S. //powerset

$$\mathbb{P}(S) = \{ T \mid T \subseteq S \}$$

$$S = \{1,2,3\} \qquad \mathbb{P}(S) : \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$$

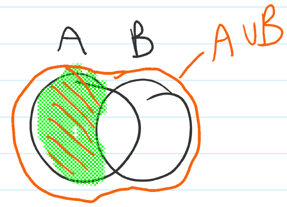
<u>Théorème</u>: si S est un ensemble avec n élts (éléments) alors
$$|\mathbb{P}(S)| = 2^n.$$

<u>Preuve</u>: Pour construire un sous-ensemble $T \subseteq S$, on choisit pour chaque $s \in S$ si s est présent dans T ou non.
Soit $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les élts de S.
Pour construire $T \subseteq S$, on a
- 2 choix pour s_1 : on met s_1 dans T, ou pas;
- 2 choix pour s_2 : " " s_2 dans T, ou pas;

...
- 2 choix pour s_n : on met s_n dans T, ou pas.

Chaque combinaison de choix donne un sous-ens. différent, et tout sous-ens. sera obtenu par une combinaison de choix.
Le nombre de combinaisons de choix est
$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ fois}} = 2^n,$$
ce qui correspond au # de sous-ensembles. ∎

Théorème : soit A et B deux ensembles. Alors $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.



Pour montrer que 2 ens. S et T sont égaux, on peut utiliser

$$S = T \iff S \subseteq T \wedge T \subseteq S$$

$$\iff \underbrace{(\forall x \cdot (x \in S \Rightarrow x \in T))}_{①} \wedge \underbrace{(\forall x \cdot (x \in T \Rightarrow x \in S))}_{②}$$

Preuve :
Pour montrer $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$, on fera 2 preuves.

① $[x \in A \setminus B \Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus B]$ $\quad A \setminus B \subseteq (A \cup B) \setminus B$

Soit $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A$ mais $x \notin B$.
Puisque $x \in A$, alors $x \in A \cup B$.
Donc $x \in A \cup B$ et $x \notin B$, ce qui implique $x \in (A \cup B) \setminus B$.

② $[x \in (A \cup B) \setminus B \Rightarrow x \in A \setminus B]$

Soit $x \in (A \cup B) \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ et $x \notin B$.
On a $x \in A \cup B$ et $x \notin B$ seulement si $x \in A$,
et sachant que $x \in A$ et $x \notin B$, on a $x \in A \setminus B$. ■

- Preuve par contraposition

$A \Rightarrow B$ est équivalent à $\neg B \Rightarrow \neg A$ (contraposée)

Quand on doit prouver $A \Rightarrow B$, on peut plutôt prouver $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Théorème : Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 est pair, alors n est pair.

$$(\forall n \in \mathbb{Z} \cdot (n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ est pair}))$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z} \cdot (\neg(n \text{ est pair}) \Rightarrow \neg(n^2 \text{ est pair})))$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z} \cdot (n \text{ est impair} \Rightarrow n^2 \text{ est impair}))$$

Preuve : on prouve par contraposée que si n est impair, alors n^2 est impair.

Sachant que n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

n pair $\Rightarrow n^2$ pair

$n = 2k$

$n^2 = (2k)^2$
$= 4k^2$
$= 2(2k^2)$

~~n^2 pair $\Rightarrow n$ pair~~

Sachant que n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$n = 2k+1$

On a ensuite

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k+1)(2k+1)$$
$$= 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2+2k) + 1$$

Donc, n^2 est un multiple de deux plus 1, et est donc impair. ■

n pair $\rightarrow$ n pair

- Preuve par contradiction

  On veut prouver p. On suppose $\neg p$, et on dérive une contradiction
  - qq de faux
  - un non-sens

  $\neg p \Rightarrow$ faux   contraposée   vrai $\Rightarrow p$

<u>Théorème</u>: soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $n = x \cdot y$. Alors $x \leq \sqrt{n}$ ou $y \leq \sqrt{n}$.

$p = (\forall n, x, y \in \mathbb{N} \cdot (n = x \cdot y \Rightarrow x \leq \sqrt{n} \vee y \leq \sqrt{n}))$

$\neg p = \neg(\forall n, x, y \in \mathbb{N} \cdot (\ldots))$

De façon générale, $\neg(\forall x \cdot P) \Longleftrightarrow \exists x \cdot (\neg P)$

$\neg p = \exists n, x, y \in \mathbb{N} \cdot (\neg(\ldots))$

$\neg p = \exists n, x, y \in \mathbb{N} \cdot \underbrace{(\neg(n = xy \Rightarrow x \leq \sqrt{n} \vee y \leq \sqrt{n}))}$

$$\neg(\overset{A}{\neg(n = xy)} \overset{}{\vee} \overset{B}{x \leq \sqrt{n}} \vee \overset{C}{y \leq \sqrt{n}})$$

$$\neg\neg n = xy \wedge \neg(x \leq \sqrt{n}) \wedge \neg(y \leq \sqrt{n})$$

$$n = xy \wedge x > \sqrt{n} \wedge y > \sqrt{n}$$

$\neg(A \vee B)$

$\neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \vee B \vee C)$

$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

$\neg p = \exists n, x, y \in \mathbb{N} \cdot (n = xy \wedge x > \sqrt{n} \wedge y > \sqrt{n})$

Preuve : Supposons pour fin de contradiction qu'il existe $n, x, y \in \mathbb{N}$ avec $n = x \cdot y$ mais $x > \sqrt{n}$ et $y > \sqrt{n}$.

On a

$$n = x \cdot y > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$$

On aurait alors $n > n$, ce qui est impossible.

L'énoncé est donc vrai. ∎

Théorème : Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : supposons pour fin de contradiction qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$\neg p$ $\quad n^2$ est pair mais n est impair.

On a donc $k, h \in \mathbb{Z}$ avec

$$n^2 = 2k \quad \text{et} \quad n = 2h+1.$$

$$\hookrightarrow (2h+1)^2 = 2k$$

$$4h^2 + 4h + 1 = 2k$$

$$(*) \quad 2h^2 + 2h + \tfrac{1}{2} = k$$

$$2(2h^2 + 2h) + 1 = 2k$$

Impair = pair

Ceci est une contradiction :

$2h^2 + 2h$ est un entier, car $h \in \mathbb{Z}$

donc $2h^2 + 2h + \frac{1}{2}$ n'est pas entier, alors que k est censé être un entier.

L'égalité $(*)$ est donc fausse, contradiction. ∎