Logique propositionnelle

9 janvier 2024 13:39

Langage math. pour exprimer des énoncés simples.

Ces énoncés peuvent être vrais ou faux.

Élément de base : variables booléennes
↳ vars vraies (V)
ou fausses (F)

ex: x, y, z
inscritEnMAT115 aFaitMAT115

Formule propositionnelle (FP)

└ énoncé qui peut être V ou F

- Une FP peut être constituée comme suit

1) V est une FP. Elle est vraie.
2) F est une FP. Elle est fausse.
3) si x est une variable
x est une FP. Sa valeur dépend de x.
4) si A est une FP
$\neg A$ est une FP, la négation de A.

Cette FP est $\begin{cases} \text{vraie} & \text{si A est fausse} \\ \text{fausse} & \text{si A est vrai} \end{cases}$

5) si A et B sont des FP, alors

$A \wedge B$	ET
$A \vee B$	OU
$A \oplus B$	XOR
$A \Rightarrow B$	A implique B
$A \Leftrightarrow B$	A si et seulement si B

sont aussi des FP.

- ET $\wedge$

$$A \wedge B = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si A est vrai et B est vrai} \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases}$$

vars : x, y, z

$x \wedge y \wedge \neg z \longrightarrow V \wedge V \wedge \neg(F)$
$V \wedge V \wedge V$
V

si $x = V$, $y = V$, $z = F$

$x \wedge y$

si $x = V$, $y = F$ → La FP est fausse
$x \wedge F \to F$

- OU $\vee$

$A \vee B = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si au moins un de A ou de B est vrai} \end{cases}$

• OU $\vee$

$$A \vee B = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si au moins un de } A \text{ ou de } B \text{ est vrai} \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases}$$

$x \vee y$

$x = V \quad y = f \quad \rightarrow V$

$x = V \quad y = V \quad \rightarrow V$

$x = f \quad y = f \quad \rightarrow f$

$V \vee y \quad \rightarrow$ évalue à V peu importe y

• OU EXCLUSIF $\oplus$

$$A \oplus B = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si exactement un de } A \text{ ou } B \text{ est vrai} \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases}$$

$x \oplus y$

$x = V \quad y = f \quad \rightarrow V$

$x = V \quad y = V \quad \rightarrow f$

$A \oplus B$ est équivalent à $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

• IMPLICATION $\Rightarrow$

$$A \Rightarrow B = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si, lorsque } A \text{ est vrai, } B \text{ est aussi vrai, ou } A \text{ est faux} \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases}$$

A	B	A⇒B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x, y, z

$x \Rightarrow y$ équiv. à $\neg x \vee y$

$x \Rightarrow y$

$x = V \quad y = V \quad \rightarrow V$

$x = V \quad y = f \quad \rightarrow F$

$x = f \quad y = V \quad \rightarrow V$

$x = F \quad y = f \quad \rightarrow V$

• SI ET SEULEMENT SI $\Leftrightarrow$

Forme raccourcie pour $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$

$$A \Leftrightarrow B = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si la valeur de } A \text{ est la même que } B \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Big(\big((A \underset{3}{\vee} B) \underset{4}{\Rightarrow} (C \underset{2}{\wedge} (\underset{1}{\neg} D))\big) \underset{6}{\Leftrightarrow} (E \underset{5}{\Rightarrow} F)\Big)$$

Priorité des opérateurs

1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$, $\oplus$
4. $\Rightarrow$
5. $\Leftrightarrow$

Intuition:	analogue numérique
$\neg x$	$-x$
$\wedge$	$*$
$\vee$	$+$
$\Leftrightarrow$	$=$

⑤ $\Longleftrightarrow$ $\quad\quad\quad$ $\Longleftrightarrow$ $\quad\quad$ $=$

$x \wedge \neg y \vee z \Longleftrightarrow p$

$x * -y + z = p$ (intuition)

ex : Tous les carrés sont petits (w, x, y, z)

$(\text{Square}(w) \Rightarrow \text{Small}(w)) \wedge$
$(\text{Square}(x) \Rightarrow \text{Small}(x)) \wedge$
$(\text{Square}(y) \Rightarrow \text{Small}(y)) \wedge$
$(\text{Square}(z) \Rightarrow \text{Small}(z))$

$\forall x \cdot (\text{Square}(x) \Rightarrow \text{Small}(x))$

Tables de vérité

Représenter les valeurs de vérité d'une formule pour toute combinaison de valeur de ses variables.

0 = Faux $\quad$ 1 = Vrai

Table de $x \vee y$

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Table de $\neg x$

x	$\neg x$
0	1
1	0

$(x \vee \neg y) \wedge z$

x	y	z	$\neg y$	$x \vee \neg y$	$(x \vee \neg y) \wedge z$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

Logique du premier ordre

- \+ riche que logique prop.
- Variables = objets quelconques $\quad$ ex : △ □ ⬠

- + riche que logique prop.
- Variables = objets quelconques ex: △ □ ⬠
- On fait des affirmations booléennes sur ces vars.
- Permet des quantificateurs $\forall$, $\exists$

Prédicat: fonction dont l'entrée est une variable
et la sortie un bool. (V ou F)

ex: $x = \triangle$ $\quad$ Triangle$(x) = V$
Square$(x) = F$

Triangle est un prédicat

ex: x = un entier

$$\text{pair}(x) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } x \text{ est un nb pair} \\ \text{faux} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

- Un prédicat peut dépendre de plusieurs vars.

ex: LeftOf$(x, y) = V$

ex: $$\text{diviseur}(x, y) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } x \text{ divise } y \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases}$$

diviseur$(5, 50) = V$
diviseur$(4, 17) = F$

Formule de premier ordre (FPO)

1) vrai
faux
sont des FPO

2) si $P(\ldots)$ est un prédicat défini sur k variables et que $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont des variables, alors

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

est une FPO

3) si A est une FPO

$\neg A$
est une FPO

4) si A et B sont des FPO

$A \wedge B$, $A \vee B$, $A \oplus B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$

sont des FPO

5) si A est une FPO et x une variable,

$\exists x \cdot A$ $\qquad$ $\exists$: il existe

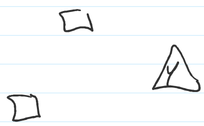
$\forall x \cdot A$ $\qquad$ $\forall$: pour tous les

sont des FPO.

$\exists x \cdot \text{LeftOf}(x, y)$

$\exists x \cdot LeftOf(x,y)$

$\forall x \cdot LeftOf(x,y)$



$\forall x \cdot LeftOf(x,y)$

$= F$

quand on met $x=y$, $LeftOf(x,y) = f$

$\exists x \cdot A$: vraie s'il est possible d'attribuer une valeur à x qui rend A vraie.

$\forall x \cdot A$: vraie si, peu importe la valeur de x parmi les variables de l'univers, A est vraie.

$\exists, \forall$ ont une priorité égale, mais sont moins prioritaires que $\Leftrightarrow$ (et donc tous les autres)

Univers $= \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

pair(2)	vrai
pair(3)	faux
divise(2,10)	vrai
$\forall x \cdot$ divise(1, x)	vrai
$\exists x \cdot$ divise(1, x)	vrai
$\forall x \cdot$ divise(x, 1)	faux — par ex, $x=2$ rend divise(2,1) fausse car $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier
$\exists x \cdot$ divise(x, 1)	vrai — par ex, $x=1$ rend divise(1,1) vraie

$\forall x \bullet (\text{pair}(x) \Rightarrow \text{divise}(2,x))$ vrai

$\exists x \bullet (\text{pair}(x) \Rightarrow \text{divise}(2,x))$ vrai

$\forall x \bullet (\exists y \bullet \text{divise}(x,y))$ vrai car peu importe x, on peut prendre $y = x$

$\exists y \bullet (\forall x \bullet \text{divise}(x,y))$ faux car il n'y a pas de y qui peut être divisé par tous les nombres

$\frac{y}{x}$

Technique de preuves d'équivalence

ex: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

① Pour prouver une telle équiv., on peut faire les tables de vérité de $p \Rightarrow q$, et $\neg p \vee q$ et vérifier qu'elles sont égales

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

② Faire une chaîne d'équivalences

Pour prouver $A \Leftrightarrow B$, il suffit de trouver des formules $C_1, C_2, \ldots, C_k$ telles que

$$(A \Leftrightarrow C_1) \wedge (C_1 \Leftrightarrow C_2) \wedge \ldots \wedge (C_{k-1} \Leftrightarrow C_k) \wedge (C_k \Leftrightarrow B)$$

Façon d'écrire:

$$\begin{aligned} & A \\ \Leftrightarrow\ & C_1 \\ \Leftrightarrow\ & C_2 \\ \Leftrightarrow\ & C_3 \\ & \ldots \\ \Leftrightarrow\ & C_k \end{aligned}$$

chaque ligne est équivalente à la suivante

$\Longleftrightarrow B$

$$\text{ex: } \overbrace{\neg(p \Rightarrow q)}^{A} \Longleftrightarrow \overbrace{p \wedge \neg q}^{B}$$

$\neg(p \Rightarrow q)$

$\Longleftrightarrow \neg((\neg p) \vee q)$ (LP-22) tel que prouvé ci-haut $p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \neg p \vee q$

$\Longleftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg q$ (LP-18) $\neg(A \vee B)$ avec $A = (\neg p)$, $B = q$

$\Longleftrightarrow p \wedge \neg q$ (LP-21)

Quelques règles utiles

- $\neg\neg p \Longleftrightarrow p$
- $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$ De Morgan 1

  $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ De Morgan 2
- $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge r$ Distributivité 1
- $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Distrib. 2
- $p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$ Contraposition

~~Note : il n'est pas vrai que $p \Rightarrow q \Longleftrightarrow q \Rightarrow p$~~ | Sophisme : affirmation du conséquent

---

Prouver une implication

$A \Rightarrow B$

Montrer que chaque fois que A est vrai, B est vrai.

- Par table de vérité
  - quand $A = 1$, s'assurer que $B = 1$

- quand $A=1$, s'assurer que $B=1$

$$\underbrace{(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)}_{A} \Rightarrow \underbrace{p\vee q}_{B}$$

p	q	$p\vee q$	$\neg p\vee\neg q$	A: $(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$	B: $p\vee q$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1

✓

- Par chaîne d'implication

$A\Rightarrow B$, on trouve $C_1, C_2, \dots, C_k$ tels que

$$(A\Rightarrow C_1)\wedge(C_1\Rightarrow C_2)\wedge\dots(C_{k-1}\Rightarrow C_k)\wedge(C_k\Rightarrow B)$$

On écrit

$$\begin{aligned} & A \\ \Rightarrow\ & C_1 \\ \Rightarrow\ & C_2 \\ \Rightarrow\ & \dots \\ \Rightarrow\ & C_k \\ \Rightarrow\ & B \end{aligned}$$

Note: on peut inclure des $\Leftrightarrow$ dans la chaîne de raisonnement

L'implication permet aussi d'utiliser

$$A\wedge B \Rightarrow A \qquad\qquad A\wedge B\Rightarrow B$$

$$A \Rightarrow A\vee B$$

Ces règles ne sont pas dans les tables LP, mais vous pouvez les utiliser.

- $\neg(p\Rightarrow(q\vee\neg r))\Rightarrow p\wedge r$

$\neg(\underline{p}\Rightarrow(\underline{q\vee\neg r}))$ $\qquad\qquad A\Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$

$\Rightarrow \neg(\neg p \vee (q \vee \neg r))$ LP-22

$\Rightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg(q \vee \neg r)$ LP-18 (De Morgan)

$\Rightarrow p \wedge \neg(q \vee \neg r)$ LP-21

$\Rightarrow p \wedge (\neg q \wedge (\neg\neg r))$ LP-18 (De Morgan)

$\Rightarrow p \wedge (\neg q \wedge r)$ LP-21

$\Rightarrow p \wedge (r)$ $\neg q \wedge r \Rightarrow r$

$\Rightarrow p \wedge r$