Preuves avec inégalités

26 mars 2024 11:39

Thm: $\forall n \geq 0$, $n^2+10 \leq n^2+n+20$

Preuve: par chaîne d'inégalité

$$\begin{aligned} n^2+10 &\leq n^2+20 \\ &\leq n^2+n+20 \quad \text{car } n \geq 0. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Pour prouver $X \leq Y$, on peut montrer

$$X \leq A_1 \wedge A_1 \leq A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \leq Y$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} X &\leq A_1 \\ &\leq A_2 \\ &\leq A_3 \\ &\leq \ldots \\ &\leq A_K \\ &\leq Y \end{aligned}$$

fonctionne aussi avec $\geq$ $<$ $>$

On a droit à des $=$ dans la chaîne

$$\begin{aligned} X &\leq A_1 \\ &= A_2 \quad ✓ \\ &\leq Y \end{aligned}$$

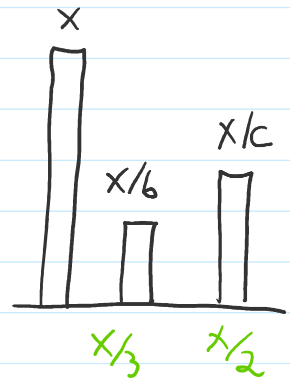
Thm: $\forall n \geq 0$, $\frac{n^3}{2}+2n^2+n+10 \leq n^3+3n^2+20$

Preuve:

$$\begin{aligned} \frac{n^3}{2}+2n^2+n+10 &\leq \frac{n^3}{2}+2n^2+n+20 && 10 \leq 20 \\ &\leq n^3+2n^2+n+20 && \frac{n^3}{2} \leq n^3 \\ &\leq n^3+2n^2+n^2+20 && n \leq n^2 \\ &= n^3+3n^2+20. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Règles de base pour $\leq$

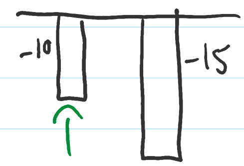
- $X \leq aX$ si $a \geq 1$
- $X \leq X + a$ si $a \geq 0$
- $\frac{X}{b} \leq X/c$ si $0 < c \leq b$



- Attention aux multiplications par des négatifs

$10 \leq 15$ $\quad\quad 2 \cdot 10 \leq 2 \cdot 15$

$-1 \cdot 10 \leq -1 \cdot 15$ non



$-1 \cdot 10 \geq -1 \cdot 15$

Thm: $\forall n \geq 1, \quad n! \leq n^n$ $\quad\quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

ex: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Preuve :

$$
\begin{aligned}
n! &= n \cdot \underbrace{(n-1)} \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\
&\leq n \cdot n \cdot \underbrace{(n-2)} \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\
&\leq n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\
&\leq \ldots \\
&\leq \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n}_{n \text{ fois}} \\
&= n^n .
\end{aligned}
$$

■

Rappel: $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

Thm: $\sum_{i=1}^{n} 2^i \geq \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 \ldots 2^n$

$i=1$

Preuve : $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$

$\geq 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$= \frac{n(n+1)}{2}$ (cours précédent) ■

car $2^i \geq i$ (?) à démontrer

Thm : pour $i \geq 0$, $\boxed{2^i \geq i.}$

Preuve : induction sur i.

Cas de base : $i=0$, $2^0 = 1 \geq 0$ ✓

Induction : on supp. que $2^{i-1} \geq i-1$.

On veut $2^i \geq i$.

$$
\begin{aligned}
2^i &= 2 \cdot 2^{i-1} \\
&\geq 2 \cdot (i-1) \qquad \text{(H.i.)} \\
&= 2i - 2 \\
&\geq i
\end{aligned}
$$

echoue si $i=1$