Preuves par induction

19 mars 2024 10:20

- Notation de somme itérée

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(n)$$

Plus généralement, pour $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{i=a}^{n} f(i) = f(a)+f(a+1)+\dots+f(n)$$

ex: $\sum_{i=2}^{5} i = 2+3+4+5 = 14$

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1+2^2+2^3 = 14$$

$$\sum_{j=1}^{5} 3j+4 = \left(\sum_{j=1}^{5} 3j\right)+4 = 3+6+9+12+15+4$$

$$\neq \sum_{j=1}^{5}(3j+4) = 7+10+13+16+19$$

$$\sum_{j=1}^{n}(3j+4j) = \sum_{j=1}^{n} 3j + \sum_{j=1}^{n} 4j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 7j$$

Théorème: soit $n \geq 0$ un entier. Alors

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1.$$

$n=0$? $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 \stackrel{?}{=} 2^{n+1}-1$, $2^{0+1}-1 = 2-1 = 1$.

$n=1$? $\sum_{i=0}^{1} 2^i = 2^0+2^1 = 3$ $\qquad 2^{n+1}-1$, $2^2-1 = 3$

$n=2$? $\sum_{i=0}^{2} 2^i = \underbrace{2^0+2^1+2^2}_{} = 7$ $\qquad 2^{n+1}-1 = 2^3-1 = 7$

$n=2$? $\sum_{i=0}^{2} 2^i = 2^0+2^1+2^2 = 7 \qquad 2^{n+1}-1 = 2^3-1 = 7$

$n=3$? $\sum_{i=0}^{3} 2^i = \underbrace{2^0+2^1+2^2}_{2^3-1} + 2^3 =$

$$2^3-1 \;+2^3 = 2\cdot 2^3 - 1 = 2^4-1$$
$$= 2^{n+1}-1$$

Pour n général >0 $\quad \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \underbrace{2^0+2^1+2^2+\dots+2^{n-1}} + 2^n$$
$$= 2^{(n-1)+1}-1 \qquad + 2^n$$
$$= 2^n - 1 \quad + 2^n$$
$$= 2\cdot 2^n - 1 = 2^{n+1}-1 \quad \checkmark$$

Principe de l'induction — P : prédicat — point de départ

- On veut prouver $P(n)$ pour tout entier $n \geq a$.

$$\underset{\text{départ}}{P(a)} \Rightarrow P(a+1) \Rightarrow P(a+2) \Rightarrow P(a+3) \Rightarrow \dots$$

1. On commence par prouver $P(a)$
2. On montre que $\forall n > a$, $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

Alt.
1. $P(a)$
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Idée: si $P(a) \wedge (\forall n > a \cdot P(n-1) \Rightarrow P(n))$
alors $\forall n \geq a \cdot P(n)$

Recette d'une preuve par induction
pour $\forall n \geq a$, $P(a)$

1. Cas de base: prouver $P(a)$

donner l'hypothèse dans preuve

① Cas de base : prouver $P(a)$

② Étape d'induction : $n > a$

donner dans thèse la preuve

$P(n-1) \Rightarrow P(n)$

On suppose par hypothèse d'induction que $P(n-1)$ est vrai.

On montre que $P(n)$ est aussi vrai.

Théorème: $\forall n \geq 0$ entier, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Preuve: ① Cas de base : $n = 0$

On a $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ et $2^{n+1} - 1 = 2 - 1 = 1$. ✓

② Induction ; on suppose par hypothèse d'induction (H.I.) que l'énoncé est vrai pour $n-1$. Donc,

(H.i.) $$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^{(n-1)+1} - 1 = 2^n - 1$$

On veut montrer que c'est vrai pour n

Donc

(but) $$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$\text{On a } \sum_{i=0}^{n} 2^i = \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}}_{} + 2^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n$$

par H.i.

$$= 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1. \blacksquare$$

Théorème: $\forall n \geq 1$ entier, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Preuve: ① Cas de case : $n = 1$. $\sum_{k=1}^{1} k = 1$

Preuve: ① Cas de case: $n=1$. $\sum_{k=1}^{1} k = 1$

et $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1\cdot(2)}{2} = 1$ ✓

② Induction: pour $n > 1$, on suppose par H.I.

→ H.i. que $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)\cdot((n-1)+1)}{2} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$

but On veut $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{n}$

On a $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n-1 + n$

$= \sum_{k=1}^{n-1} k + n$

par H.i.

$= \frac{(n-1)\cdot n}{2} + n$

$= \frac{(n-1)\cdot n + 2n}{2}$

$= \frac{n\cdot(n-1+2)}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ∎

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$

$\sum_{i=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Cas de base: $n=1$, même chose

Induction: on suppose par H.i que l'énoncé est vrai pour n, donc

H.i. $\sum_{i=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

On veut que ce soit vrai pour $n+1$, donc

but $\sum_{i=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a $\sum_{i=1}^{n+1} k = \sum_{i=1}^{n} k + n+1$

par H.i. $= \frac{n(n+1)}{2} + n+1$

$$\overset{\text{par H.i.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \blacksquare$$

Théorème : Soit f la fonction mathématique définie sur les entiers $\mathbb{N}$ comme suit

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2\cdot f(n-1) & \text{si } n>0 \end{cases}$$

Alors, $f(n) = 2^n$.

Preuve : Cas de base : $n=0$. Quand $n=0$, $f(0)=1$ (par déf.)

Aussi, $2^n = 2^0 = 1$. ✓

Induction : pour $n \geq 0$, on suppose par H.i.

H.i. $f(n-1) = 2^{n-1}$.

but On veut que $f(n) = 2^n$

Par définition, quand $n>0$,

$$f(n) = 2\cdot f(n-1)$$

$$\overset{\text{H.i.}}{=} 2\cdot 2^{n-1}$$

$$= 2^n. \qquad \blacksquare$$

Théorème : soit f définie par

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 3 & \text{si } n=1 \\ f(n-1)+6f(n-2) & \text{si } n>1 \end{cases}$$

Alors $f(n) = 3^n$.

Cas de base : $n=0$. $f(0)=1$ $\quad 3^0=1$ ✓

Induction : on suppose par HI que $f(n-1)=3^{n-1}$.

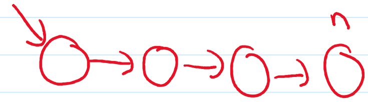
On a $f(n) = f(n-1)+6f(n-2)$

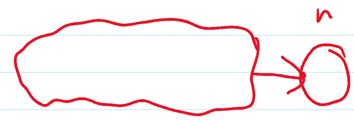
$\qquad = 3^{n-1}+6f(n-2)$

- Induction forte : Pour prouver $P(n)$ $\forall n \geq a$

Dans l'étape d'induction, quand on est rendus à prouver $P(n)$, on peut supposer

$P(a) \wedge P(a+1) \wedge P(a+2) \wedge \dots \wedge P(n-1)$





$$\left[\underline{P(a)} \quad P(a+1) \quad P(a+2) \quad \dots \quad P(n-1)\right] \Rightarrow \underline{P(n)}$$

Principe : si $P(a)$ et $\forall n > a$

on a $[P(a) \wedge P(a+1) \wedge \dots \wedge P(n-1)] \Rightarrow P(n)$,

alors $P(n)$ est vrai $\forall n \geq a$.

Revenons sur $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 3 & \text{si } n=1 \\ f(n-1)+6f(n-2) & \text{si } n>1 \end{cases}$

$n=0$	cas de base ✓
$n=1$	cas de base
$n=2$	induction
$n=3$	"
$\vdots$	"

Cas de base : $n=0$. $f(0)=1$ $\quad 3^0=1$ ✓

$n=1$. $f(1)=3$ $\quad 3^1=3$ ✓

Induction forte : on suppose que l'énoncé est vrai pour tout entier inférieur à n. Donc, que pour tout m entre 0 et $n-1$, on a $f(m)=3^m$.

H.I. (forte)

Donc on a $f(n) = f(n-1)+6f(n-2)$ $\quad n>1$

(forte) $f(m) = 3^m$.

Pour n, on a $f(n) = f(n-1) + 6f(n-2)$ $n>1$

H.i. $= 3^{n-1} + 6f(n-2)$

H.i. $= 3^{n-1} + 6 \cdot 3^{n-2}$

$$= 3^{n-1} + 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-2}$$
$$= 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}$$
$$= 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \quad \blacksquare$$

Danger de l'induction forte : sauter par-dessus des cas.

"Preuve" que tout entier n non-négatif est pair. $n=0$ ✓

: par induction forte sur n. $n=1$

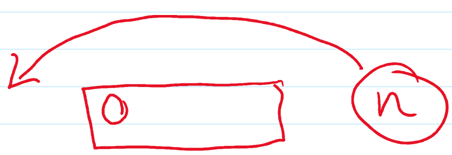
① Cas de base : $n=0$. n est pair ✓

② on suppose que tout entier inférieur à n est pair.

On veut montrer que n est pair. échoue sur $n=1$

Considérons $n-2$. Par H.i., $n-2$ est pair.

Donc $n = (n-2)+2$ est aussi un nb pair. $\blacksquare$



Quand on utilise l'H.i., il faut s'assurer qu'elle s'applique. Dans l'ex. ci-haut, la H.i. sur $n-2$ ne s'applique pas quand $n=1$.

Thm : Tout entier $n \geq 2$ est le produit de nombres

<u>Thm</u>: tout entier $n \geq 2$ est le produit de nombres premiers.

ex: $15 = 3 \cdot 5$ $\quad$ $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$45 = 15 \cdot 3 = 3 \cdot 5 \cdot 3$ $\quad$ $100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$

Par induction forte sur n.

<u>Cas de base</u>: $n = 2$, trivialement vrai.

<u>Induction</u>: on suppose par induction que tout entier m avec $2 \leq m < n$ est le produit de nbs premiers.

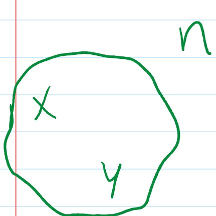
Considérons $n > 2$.

$n = 3$

Si n est déjà premier, alors l'énoncé est vrai pour n.

$4 = 2 \cdot 2$

Sinon, n n'est pas premier. Donc, $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tels que $n = x \cdot y$ $\quad (x, y \neq 1$ et $x, y \neq n)$.



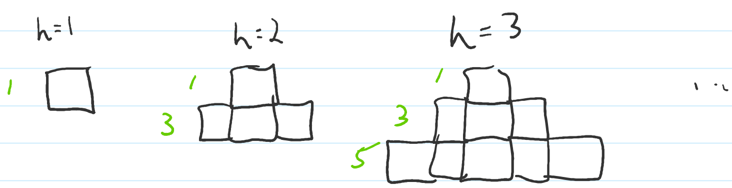
$2 .. n-1$

On a que x et y doivent être entre 2 et $n-1$ et la H.I. s'appliquent sur eux.

Donc $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ où chaque p_i est premier et

$y = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_\ell$ où chaque q_i est premier.

Donc $n = x \cdot y = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_\ell$, donc est le produit de nb premiers. $\blacksquare$



Une pyramide de blocs est une structure dans laquelle il y a 1 bloc au niveau 1, et au niveau i, le nb de blocs est le nb de blocs

Une pyramide de blocs est une structure dans laquelle il y a 1 bloc au niveau 1, et au niveau i, le nb de blocs est le nb de blocs au niveau $i-1$, plus 2.

Lemme : au niveau k, il y a $2k-1$ blocs.

Induction sur le niveau.

Cas de base : $k=1$. Il y 1 bloc et $2k-1=2-1=1$.

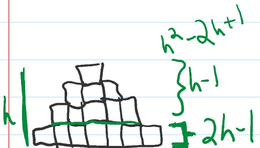
Induction : on supp. qu'au niveau $k-1$, il y a $2(k-1)-1=2k-2-1=2k-3$.

Au niveau k, il y en a 2 de plus, et donc $2k-3+2=2k-1$. ∎

Théorème : une pyramide de hauteur h a h^2 blocs.

Cas de base : $h=1$: 1 bloc et $h^2=1^2=1$ ✓

Induction : on supp. qu'une pyramide de hauteur $h-1$ a $(h-1)^2=h^2-2h+1$ blocs. (H.i.)



Soit une pyramide de hauteur h. On veut montrer qu'il y a h^2 blocs.

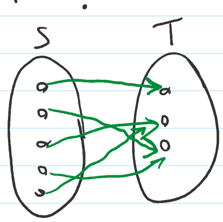
Si on retire le niveau h, on a pyramide de hauteur $h-1$, qui a donc $(h-1)^2=h^2-2h+1$ blocs.

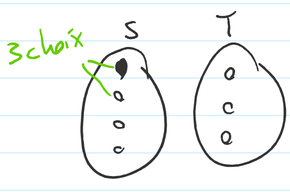
En ajoutant le niveau h, on ajoute $\overbrace{2h-1}^{\text{par le lemme}}$ blocs.

Au total, #blocs $= h^2-2h+1+2h-1=h^2$. ∎

Thm : Pour 2 ensembles non-vides S et T (finis), le nb de fonctions totales de S vers T est $|T|^{|S|}$.

tout $x \in S$ en relation



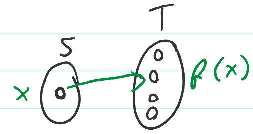


$3\cdot3\cdot3\cdot3=3^4$

$\underbrace{|T|\cdot|T|\cdot|T|\cdot|T|}_{|S| \text{ fois}}=|T|^{|S|}$

Preuve: Par induction sur $|S|$.

Cas de base: $|S|=1$.

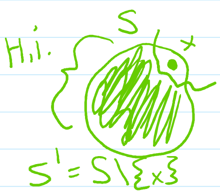


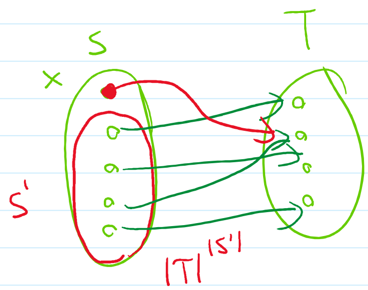
Soit $x \in S$. Il y a $|T|$ façons de mettre x en relation dans une fct totale

$\Rightarrow |T|$ fcts possibles

et $|T|^{|S|} = |T|^{1} = |T|$. ✓

Induction: on suppose que pour un ensemble S' avec $|S'| = |S|-1$, il y a $|T|^{|S'|} = |T|^{|S|-1}$ fcts ttl de S' vers T.





Soit $x \in S$ un elt quelconque et $S' = S \setminus \{x\}$.

Par H.i., il y a $|T|^{|S'|}$ fcts ttl de $S' \to T$.

Pour obtenir une fct ttl de $S \to T$, on prend une fct de $S' \to T$ et on choisit un correspondant $f(x)$ à x. Le nb de fcts de S vers T est donc

$$\# \text{ fct ttl de } S' \text{ vers } T \cdot \# \text{ de façons d'associer } x$$

$$= \underbrace{|T|^{|S'|}}_{\text{H.i.}} \cdot |T| = |T|^{|S|-1} \cdot |T| = |T|^{|S|}. \blacksquare$$

$n-1 \Rightarrow n$

$n \Rightarrow n+1$