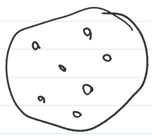
Ensembles

31 janvier 2023 11:39



Sac avec des objets (différents)
L'ordre n'a pas d'importance

Collection non-ordonnée d'objets distincts

Deux façons de définir un ensemble S (set)

1) Déf. par extension : enumérer ses objets entre $\{\ldots\}$

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$S = \{2,4,6,8,10\} = \{4,6,2,10,8\}$

$S = \{2, \text{"allo"}, \text{"mat115"}\}$

$S = \{\{2,4\}, \{1,2\}\}$ $\qquad$ $S = \{1,1,2,2,3\} = \{1,2,3\}$

2) Déf. par compréhension :

$S =$ "tous les objets x de l'univers qui satisfont une formule"

$$S = \{\underbrace{x}_{\text{tous les } x} \ \underbrace{\mid}_{\text{tels que}} \ \underbrace{A}_{x \text{ satisfait } A}\}$$

Les nbs pairs entre 1 et 100

$S = \{x \mid \exists y \cdot (x = 2y) \wedge x \geq 1 \wedge x \leq 100\}$

Quelques ensembles populaires

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$
$= \{x \mid x = \frac{a}{b} \wedge a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$

$\mathbb{R} =$ les réels

$|S|, \in, \notin, \emptyset, \cup, \cap, \setminus, \subseteq$

- Soit S un ensemble

$|S| =$ cardinalité de $S =$ nb d'$\overbrace{\text{élts}}^{\text{éléments}}$ dans S

Certains écrivent card(S)

$|\{1,2,4,9\}| = 4$

$|\{1,1,2,2,4\}| = 3$

$|\{\{1,2\}, \text{allo}, 115\}| = 3$

$|\mathbb{N}| = \infty$ $\qquad$ $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$

- $\emptyset$: ensemble vide

  $|\emptyset| = 0$

  $\emptyset = \{\}$ $\quad |\{\}| = 0$

  $|\{\emptyset, 123, \{1,2\}\}| = 3$

  $|\{\emptyset\}| = 1$

  $|\{\emptyset, \{\}\}| = 1$

  $|\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}| = 3$

- $\in$: appartient à

  $x \in S$ est vrai ssi x est un elt de S

  ex: $S = \{1, 4, 8\}$ $\quad 1 \in S \quad 4 \in S$

  $9 \in S$ faux $\quad 9 \notin S$

- $\notin$: n'appartient pas à

  $x \notin S$ est vrai ssi x n'est pas dans S

- $\subseteq$: sous-ensemble de

  $S \subseteq T$ ssi $\forall x \cdot (x \in S \Rightarrow x \in T)$

  (tout elt de S est dans T)

Note: ne mélangez pas $\in$ $\subseteq$

$x \in S$ $\quad$ x = elt $\quad$ S = ensemble

$S \subseteq T$ $\quad$ S = ensemble $\quad$ T = ensemble

- $\cup, \cap, \setminus$
  - Union $\cup$

    $S \cup T$ = ensemble avec les elts dans S ou dans T

    $S \cup T = \{x \mid x \in S \vee x \in T\}$

  - Intersection $\cap$

    $S \cap T$ = ens. avec les elts communs de S et T

    $S \cap T = \{x \mid x \in S \wedge x \in T\}$

  - Différence $\setminus$ $\quad$ parfois $-$

    $S \setminus T$ = ens. avec les elts de S pas dans T

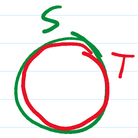
    $S \setminus T = \{x \mid x \in S \wedge x \notin T\}$

Note: $S \cup T = T \cup S$ $\qquad$ $S \cap T = T \cap S$

$S \setminus T$ pas tjrs égal à $T \setminus S$

- On écrit $S = T$ si $S \subseteq T \wedge T \subseteq S$

$$S = T \text{ ssi } \forall x \in S \cdot x \in T \wedge \forall x \in T \cdot x \in S$$



Question : soit S un ensemble avec $|S| = n$

Que vaut $|\{P \mid P \subseteq S\}|$?

- Ensemble des parties de S

$$\mathbb{P}(S) = \{P \mid P \subseteq S\}$$

ex : $S = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbb{P}(S) =$							
	$\emptyset$						1
	1	2	3	4			+4
	12	13	14	23	24	34	+6
	123	124	134	234			+4
	1234						+1
							16

Si $|S| = n$, alors

$$|\mathbb{P}(S)| = 2^n$$

Pourquoi ? Pour construire $P \subseteq S$, on fait une série de choix. Soit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$,

- on a 2 choix pour s_1 : on l'inclut dans P, ou non
- on a 2 choix pour s_2, inclut ou non

...

- on a 2 choix pour s_n, inclut ou non

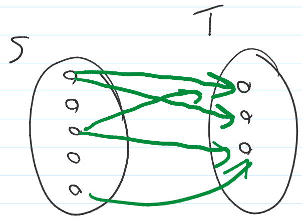
Pour chaque combinaison de choix, on obtient un sous-ensemble différent.
Le nombre de sous-ens. de S est donc

$$\underbrace{2}_{s_1} \cdot \underbrace{2}_{s_2} \cdot \underbrace{2}_{s_3} \cdot \ldots \cdot \underbrace{2}_{s_n} \quad (n \text{ fois})$$

$= 2^n$

Relations

Concept permettant d'associer des paires d'objets.



Soit S et T deux ensembles et $x \in S$, $y \in T$.

On dénote le fait que x est en relation avec y par

(x, y) // couple $\neq (y, x)$

Certains dénote $x \mapsto y$ (équiv. à (x,y))

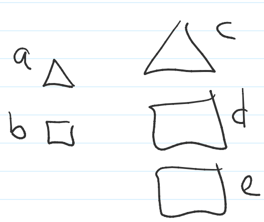
Une relation de S à T est un sous-ensemble de $S \times T$

- $S \times T$ = ens. de tous les couples (x,y), $x \in S$, $y \in T$
  $S \times T = \{ (x,y) \mid x \in S \wedge y \in T \}$
  Produit cartésien
- Si R est une rel., $R \subseteq S \times T$

ex: Tarski : relation sur ensemble de formes vers ensemble de formes

MemeTaille : (x,y) si x et y ont la même taille

MemeTaille $= \{ (x,y) \mid \text{SameSize}(x,y) \}$



$\{ (a,b), (c,d), (c,e), (d,e),$
$(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e),$
$(b,a), (d,c), (e,c), (e,d) \}$

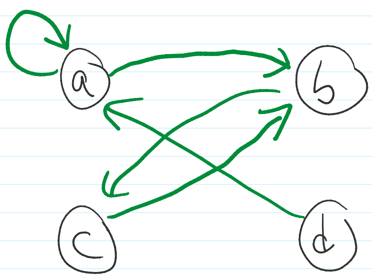
- Une relation de S à S est appelée homogène

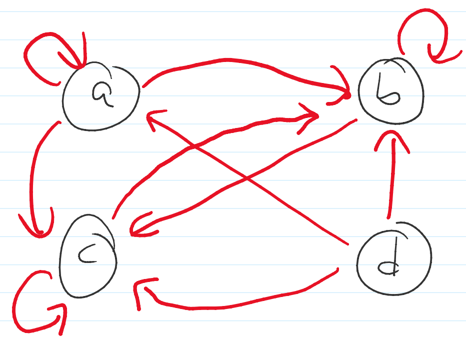
- Une relation de S à S est appelée homogène

On peut visualiser une telle relation à l'aide d'un graphe:

sommets (nœuds): elt de S
arêtes (flèche): flèche de x à y si (x,y) en rel.

$R = \{(a,b),(a,a),(c,b),(b,c),(d,a)\}$ $S = \{a,b,c,d\}$



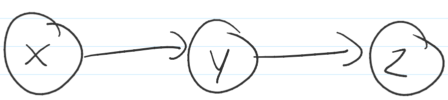


R^*

- Composition de relations (homogène)

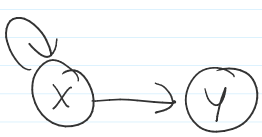
Si on prend une relation R et qu'on la compose avec elle-même, on obtient une autre relation qu'on dénote

$$R;R = \{(x,z) \mid (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R\}$$

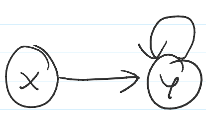


$(x,y),\ (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R;R$

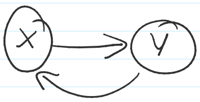
$(x,x) \notin R;R$
$(x,y) \notin R;R$



$(x,x)\ (x,y) \rightarrow (x,y) \in R;R$



$(x,y)\ (y,y) \rightarrow (x,y) \in R;R$



$(x,y)\ (y,x) \rightarrow (x,x) \in R;R$

On dénote aussi: $R;R = R^2$

On dénote aussi $R;R = R^2$

On définit R^n comme suit $(n \in \mathbb{N})$:

$R^1 = R$

$R^2 = R;R$

$\forall n \geq 3 : R^n = \underbrace{R^{n-1};R}$

R^n : (x,y) tels qu'il existe un chemin avec exactement n arêtes

$R^* =$ fermeture transitive et réflexive

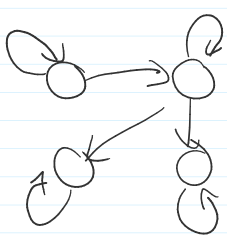
$= R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \ldots$

$= \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$ $\qquad \bigcup_{n=0}^{\infty}$ union itérée

---

Type de relations (homogènes)

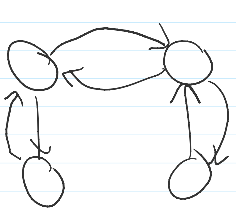
- Réflexives : Tout x est en rel. avec lui-même



R est réflexive si

$\forall x \cdot ((x,x) \in R)$

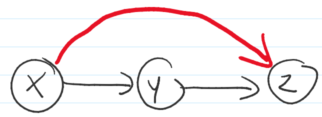
- Symétriques : si x en lien avec y, y en lien avec x



R est symétrique si

$\forall x,y \cdot ((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)$

- **Transitives** : si x en lien avec y, y en lien avec z, alors x en lien avec z

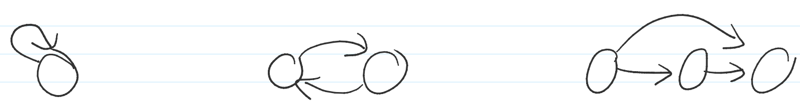


R est transitive si

$$\forall x,y,z\ \big((x,y)\in R \land (y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R \big)$$

- **Relation d'équivalence**

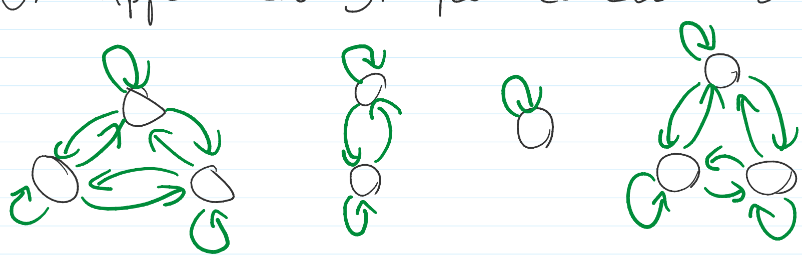
  R est une rel. d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive



Si R est une rel. d'équiv., on peut partitionner les elts en groupe qui ont

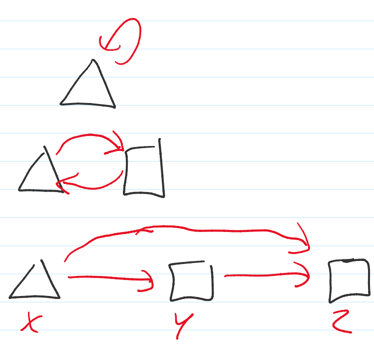
- tous les liens entre eux (à l'intérieur du groupe)
- aucun lien entre les groupes

On appelle ces groupes des classes d'équivalence



ex : $MemeTaille = \{ (x,y) \mid SameSize(x,y) \}$ rel. equiv.

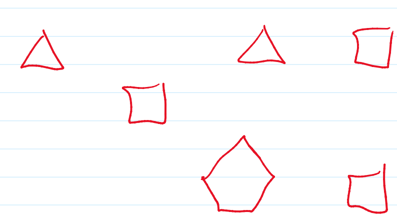
reflex. :



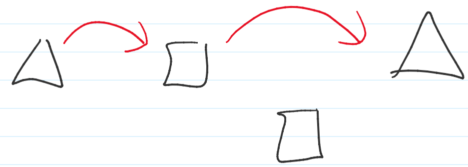
sym. :

trans. :

$MemeRangee = \{ (x,y) \mid SameRow(x,y) \}$



$\{(x,y) \mid LeftOf(x,y)\}$



- pas réflexif
- pas symétrique
  $\rightarrow$ (asymétrique)
- transitif

- Asymétrique :

  R est asymétrique si
  $$\forall x,y \cdot ((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R)$$
  $(x,x) \notin R$

- Antisymétrique :

  R est antisymétrique si
  $$\forall x,y \cdot ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y)$$
  Comme asymétrique, mais
  $(x,x) \in R$ possible

ppq = plus petit que sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$ppq = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge (x < y)\}$$

- refl : NON
- sym : NON
- transit : OUI
- asymétrique : OUI
- antisymétrique : OUI

$x < y \quad y < z$

$x < y$ non $y < x$

ppoe = plus petit ou égal

$ppoe = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge (x \leq y)\}$

Réflexif: Oui car $x \leq x$

Symétrique: NON $x \leq y \overset{?}{\Rightarrow} y \leq x$ $(2,4) \in ppoe$ $(4,2) \notin ppoe$

Transitif: Oui $x \leq y \wedge y \leq z \overset{?}{\Rightarrow} x \leq z$

Asymétrique: NON $x \leq y \Rightarrow \neg(y \leq x)$ faux $x = y$

Antisymétrique: Oui $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

Domaine d'une relation

Soit $R \subseteq S \times S$ (ou $R \subseteq S \times T$)

$dom(R) = \{x \mid \exists y \cdot ((x,y) \in R)\}$

les x qui ont une "flèche sortante"

Codomaine d'une relation (range)

$ran(R) = \{y \mid \exists x \cdot ((x,y) \in R)\}$

les y qui ont une "flèche entrante"

Relation identité

Soit S un ensemble

$id(S) = \{(x,x) \mid x \in S\}$

Si $R \subseteq S \times S$, on dénote parfois $R^0 = id(S)$

Inverse

Soit $R \subseteq S \times S$

$R^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in R \}$

Restriction du domaine d'une relation

Soit $R \subseteq S \times S$ et $X \subseteq S$

$X \lhd R$ = restreidre R au domaine X

$X \lhd R = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R \wedge x \in X \}$