Arbres de preuve

30 janvier 2024 10:51

$A \to B \to C \to \dots \to Z$ linéaire

Une preuve en "arbre" est possible.

- En maths, on démarre d'axiomes pour déduire des théorème.

On écrit $A_1, A_2, \dots, A_k \vdash B$ pour dire
"étant donné les axiomes $A_1, \dots, A_k$, on peut déduire logiquement B".

Ceci peut aussi s'écrire

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_k}{B} \leftarrow \vdash : \text{déduction logique}$$

ex: $$\frac{1+1=2 \qquad 2\times 2=4}{(1+1)\times(1+1)=4}$$

Note: distinction $A \Rightarrow B$ si A est vrai, alors B
$A \vdash B$ A est vrai, donc B

- Une preuve avec les $\frac{A}{B}$ peut avoir niveaux

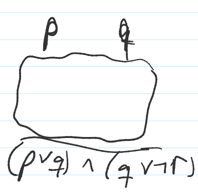
ex: $A_1 \quad A_2 \quad A_3$

$$\cfrac{\cfrac{A_1 \quad A_2}{B} \qquad A_3}{C}$$

ex: $p, q \vdash (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$ ✓

p
q

$$\cfrac{\cfrac{p}{p \vee r} \qquad \cfrac{q}{q \vee \neg r}}{(p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)}$$



Prouver une implication sans axiome (en MAT115)

$A \Rightarrow B$

$\vdash A \Rightarrow B$

$$\cfrac{\boxed{\begin{array}{c}\underline{A}\\ \underline{\cdots}\\ \cdots\\ B\end{array}}}{A \Rightarrow B}$$

On suppose que A est vrai, et on montre que B devient vrai

Pour rendre clair que A est supposé "tempo-

Pour rendre clair que A est supposé "temporairement" dans le but de prouver B, on attribue un identifiant (id) à A, et la ligne $\dfrac{\begin{matrix} A \\ \vdots \end{matrix}}{A \Rightarrow B}$ sert à justifier la création de cet id.

$$\dfrac{\begin{matrix} A^{[1]} \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \Rightarrow B}[1]$$

← ligne qui justifie $A^{[1]}$
On dit que cette ligne "décharge" l'hypothèse $A^{[1]}$.

$\vdash p \wedge q \Rightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$

$p \wedge q^{[1]}$

$$\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \wedge q^{[1]}}{p}}{p \vee r} \qquad \dfrac{\dfrac{p \wedge q^{[1]}}{q}}{q \vee \neg r}}{(p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)}}}{p \wedge q \Rightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)}[1]$$

Outils de preuve

① $\dfrac{A \wedge B}{A}$

② $\dfrac{A \wedge B}{B}$

③ $\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}$

④ $\dfrac{A}{A \vee B}$

⑤ $\dfrac{\neg\neg A}{A}$

⑥ $\begin{matrix} A^{[i]} \\ \vdots \end{matrix}$

⑥
$$\dfrac{\begin{matrix} A^{[i]} \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \Rightarrow B}[i]$$

⑦ Preuve par cas $\quad A \vee B \Rightarrow C$

- si A est vrai, alors C
- si B est vrai, alors C

$$\dfrac{A \vee B \qquad \boxed{\begin{matrix} A^{[i]} \\ \vdots \\ C \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} B^{[j]} \\ \vdots \\ C \end{matrix}}}{C}[i,j]$$

⑧
$$\dfrac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}$$

$$\vdash p \vee (\neg p \wedge q) \Rightarrow p \vee q$$

$p \vee (\neg p \wedge q)^{[1]}$

$$\dfrac{\dfrac{p \vee (\neg p \wedge q)^{[1]} \qquad \dfrac{p^{[2]}}{p \vee q} I_{\vee l} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg p \wedge q^{[3]}}{q} E_{\wedge 2}}{p \vee q} I_{\vee l}}{p \vee q}[2,3]}{p \vee (\neg p \wedge q) \Rightarrow p \vee q}[1]$$

Preuves par contradiction

Vous voulez argumenter que A est vrai.

On suppose $\neg A$ et on dérive une contradiction, quelque de faux.

Pour mettre en place une preuve par contradiction avec les arbres, on a besoin d'autres règles.

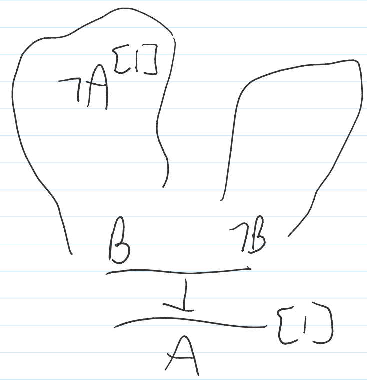
font mettre en place une preuve par contradiction avec les arbres, on a besoin d'autres règles.

Symbole : $\bot$: faux

(9) $$\frac{\bot}{A}$$ faux $\Rightarrow$ A

(10) $$\boxed{\begin{array}{c}\neg A^{[1]}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}$$ $$\frac{\quad}{A}\,[1]$$

$\longleftarrow$



(11) $$\frac{B \qquad \neg B}{\bot}$$

$\vdash p \Rightarrow \neg\neg p$

$p^{[1]}$

$\neg(\neg\neg p)^{[2]}$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{p^{[1]} \qquad \cfrac{\neg(\neg\neg p)^{[2]}}{\neg p}}{\bot}}{\neg\neg p}\,[2]}{p \Rightarrow \neg\neg p}\,[1]$$