Université de Sherbrooke - Département d'informatique
MAT115 - Logique et mathématiques discrètes (Hiver 2024)

EXAMEN INTRA

Enseignant : Manuel Lafond

- Cet examen individuel a été conçu pour une durée de 3h00.
- L'examen comporte 6 questions totalisant 102 points. Si votre note dépasse 100, la note attribuée à votre examen sera 100.
- Indiquez clairement les questions auxquelles vous répondez.
- Vous pouvez **utiliser les résultats présentés** en classe, dans les notes de cours et dans les exercices sans justification.

QUESTION 1 : preuves d'équivalences et d'implications (18 points)

Démontrez les équivalences et implications suivantes. Vous devez justifier chaque étape par une des entrées LP-X des tables des lois, ou avec une des implications $A \Rightarrow A \vee B$ et $A \wedge B \Rightarrow A$.

a. $((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

b. $(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p \vee r$

c. $\neg p \vee (q \wedge (p \vee \neg q)) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

QUESTION 2 : formules et modèles (14 points)

Répondez aux questions suivantes.

a. Donnez la table de vérité de chacune de ces trois formules. Vous n'avez pas à inclure toutes les étapes intermédiaires (mais vous pouvez si vous le voulez). Vous pouvez aussi inclure toutes vos entrées dans une seule table.

$$\neg p \vee q$$
$$\neg q \vee \neg r$$
$$(q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow r$$

b. Combien de modèles cet ensemble de formules a-t-il? Aucune justification requise.

c. Cet ensemble de formules est-il cohérent? Aucune justification requise.

d. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules. Vrai ou faux: si $\mathcal{A}$ est cohérent, alors chacune des formules de $\mathcal{A}$ est satisfaisable. Justifiez votre réponse.

e. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules. Vrai ou faux: si chacune des formules de $\mathcal{A}$ est satisfaisable, alors $\mathcal{A}$ est cohérent. Justifiez votre réponse.

QUESTION 3 : arbres de preuve (18 points)

À l'aide des lois sur les arbres de preuves, donnez un arbre de preuve pour chacune des affirmations suivantes. Je vais tolérer que vous n'ajoutiez pas la règle justifiant chaque étape. Par contre, vous devez clairement identifier les hypothèses à décharger, et clairement indiquer où elles sont déchargées.

a. $p \land \neg q \Rightarrow (p \lor q) \land p$

b. $((p \lor q) \land (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \lor r)$

c. $(p \land (q \land r)) \Rightarrow \neg(\neg p \lor \neg(q \land r))$ (suggestion: preuve par contradiction + preuve par cas)

QUESTION 4 : formules du premier ordre (24 points)

Dans les trois sous-questions qui suivent, nous utilisons les prédicats sur les chaînes de caractères tels que définis dans le devoir 2. Rappelons ces prédicats: pour une chaîne x, $alpha(x)$ est vrai si et seulement si tous les caractères de x sont alphabétiques; $num(x)$ est vrai si et seulement si tous les caractères de x sont numériques; pour deux chaînes x, y, $plusCourt(x, y)$ est vrai si et seulement si la longueur de x est inférieure à la longueur de y; $diff(x, y)$ est vrai si et seulement si x et y sont des chaînes différentes.

Donnez une formule de logique du premier ordre pour modéliser chacune des phrases suivantes:

a. Il y a deux chaînes alphabétiques qui sont de longueurs différentes.

b. S'il y a au moins une chaîne qui n'est pas numérique, alors il y a au moins une chaîne qui est alphabétique.

c. Toutes les chaînes de longueur maximum sont numériques.

Dans les trois sous-questions qui suivent, nous utilisons les prédicats définis dans Tarski-UdeS. Ceux-ci sont données en annexe. Pour chacune des formules ci-bas, vous devez décrire (1) un univers contenant au moins trois objets qui rendent la formule vraie; (2) un univers contenant au moins trois objets qui rendent la formule fausse.

Vous pouvez décrire vos objets en mots ou en dessin. Aucune justification n'est requise, et il n'y a pas de tautologie ni de contradiction.

e. $\exists x \cdot \exists y \cdot \exists z \cdot (Smaller(x, y) \land Smaller(y, z))$

f. $\forall x \cdot (Medium(x) \lor Large(x) \Rightarrow \neg(\exists y \cdot Smaller(y, x)))$

g. $\exists x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (Triangle(y) \land Square(z) \Rightarrow Smaller(y, x) \land Smaller(x, z))$

QUESTION 5 : définitions d'ensembles et relations (16 points)

Dans cette question, nous modélisons un réseau social à l'aide d'ensembles et relations. Comme point de départ, on suppose que vous avez accès à:
$Personne$: un ensemble de personnes;
$Amis$: une relation homogène sur $Personne$, telle que $(x, y) \in Amis$ si x et y sont des amis. On suppose que $Amis$ est une relation symétrique et irréflexive, ce qui veut dire que si x est ami avec y, alors y est ami avec x, et aucune personne n'est amie avec elle-même.

Par exemple, on pourrait avoir $Personne = \{Alice, Bob, Charlie\}$, et
$Amis = \{(Alice, Bob), (Bob, Alice), (Bob, Charlie), (Charlie, Bob)\}$.

Vous devez définir chacun des ensembles décrits ci-bas. Vos définitions doivent fonctionner pour tout univers, pas seulement sur l'exemple.

a. SuperAmi: un ensemble qui contient chaque personne qui est amie avec tout le monde (sauf elle-même). Dans l'exemple ci-haut, $SuperAmi = \{Bob\}$.

b. Connaissance: une relation qui contient (x, y) si x, y sont des personnes distinctes qui ne sont pas amies, mais qui ont au moins un ami en commun.

c. MemeReseau: une relation qui contient (x, y) si x et y sont des personnes qui ne sont pas amies, mais tel que x et y ont exactement les mêmes amis. On considère que (x, x) satisfait cette condition.

d. Celebrite: un ensemble qui contient les personnes qui ont le nombre maximum d'amis parmi toutes les personnes.
Dans l'exemple ci-haut, *Bob* serait le seul membre de cet ensemble car il a deux (2) amis et les autres ont un (1) ami. Notez qu'un réseau peut contenir plusieurs célébrités s'il y a égalité. Rappelons que vous pouvez utiliser la notion de cardinalité dans une définition par compréhension.

QUESTION 6 : propriétés des relations et fonctions (12 points)

Répondez aux questions suivantes. Aucune justification n'est requise.

a. Soit $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Donnez un exemple de relation R homogène sur S telle que R est une fonction totale bijective, en plus d'être une relation symétrique.

b. Considérez la relation $MemeReseau$ telle que définie à la question précédente.
Vrai ou faux: $MemeReseau$ est toujours réflexive, indépendamment du contenu de $Amis$.
Vrai ou faux: $MemeReseau$ est toujours symétrique, indépendamment du contenu de $Amis$.
Vrai ou faux: $MemeReseau$ est toujours transitive, indépendamment du contenu de $Amis$.

c. Soit $S = \{0, 1, \ldots, 99\}$ et f la fonction de S vers S définie comme:

$$f = \{(x, y) \mid x \in S \land y \in S \land ((x \leq 98 \land y = x + 1) \lor (x = 99 \land y = 0))\}$$

Dites quelle(s) propriété(s) parmi les suivantes s'applique à f: totale, injective, surjective, bijective.

Annexe: documentation sur les prédicats de Tarski-UdeS

Predicates:

Triangle(x)	x is a triangle	Smaller(x,y)	x is smaller than y
Square(x)	x is a square	SameSize(x,y)	x and y have the same size
Pentagon(x)	x is a pentagon	SameCol(x,y)	x and y are in the same column
Small(x)	x is small	SameRow(x,y)	x and y are in the same row
Medium(x)	x is medium	LeftOf(x,y)	the column of x is on the left of the column of y
Large(x)	x is large	Between(x,y,z)	x is between y and z on a row, column or diagonal

Equality:

x = y	x is equal to y
x /= y	x is different from y