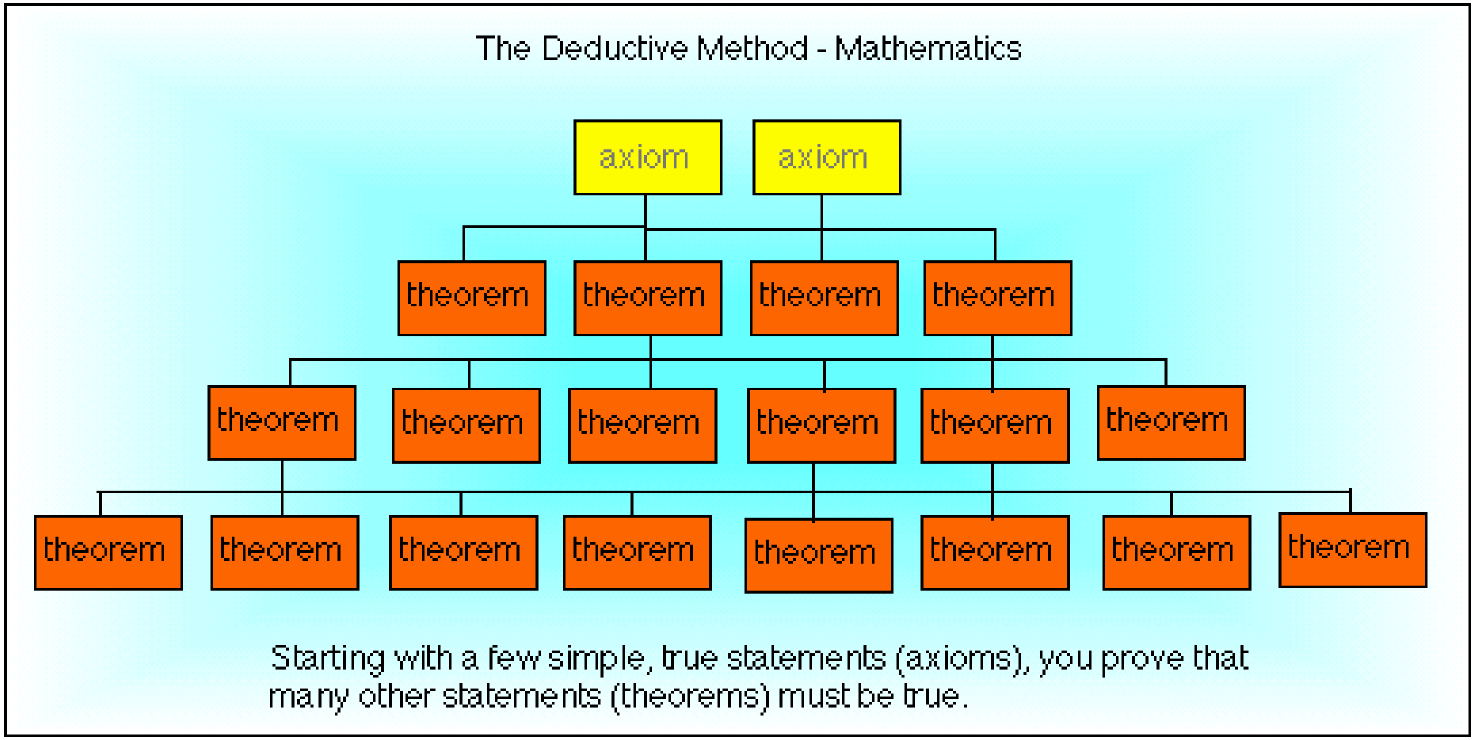
Logique et mathématiques discrète avec Manuel Lafond

Introduction

- **Logique**
  - Étude des mathématiques en tant que **langage**.
  - Représenter des énoncés formellement avec des **formules.**
  - **Prouver** des énoncés de façon rigoureuse avec des règles de dérivation.

  - **Axiomes** = énoncés de « départ »
  - **Théorèmes** = énoncés dérivables logiquement à partir des axiomes


The Deductive Method - Mathematics
axiom
axiom
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
theorem
Starting with a few simple, true statements (axioms), you prove that many other statements (theorems) must be true.

- **Mathématiques discrètes**
  - **Discret** = dénombrable, que l’on peut énumérer
    - ex: liste d’étudiants, instructions d’un programme, état de la mémoire, nombres entiers
    - ex non-discret: les réels entre 0 et 1
  - Maths discrètes = étude des structures discrètes
    - Graphes et réseaux
    - Automates
    - Complexité algorithmique
    - Théorie des l’information
    - …

- Objectifs du cours
  - 1. Représenter des énoncés en formule mathématique
  - ex: La somme de deux nombres entiers pairs est un nombre pair.

- Objectifs du cours
  - 1. Représenter des énoncés en formule mathématique
  - ex: La somme de deux nombres entiers pairs est un nombre pair.

$$\forall x, y \cdot (x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \exists i, j \cdot x = 2i \wedge y = 2j) \Rightarrow (\exists k \cdot x + y = 2k)$$

- Objectifs du cours
  - 2. Interpréter des formules mathématiques
  - ex:

$$
\begin{aligned}
\forall x, y \cdot (x \in \mathbb{N} \wedge y \in \wedge \mathbb{N} \wedge \\
\exists k \cdot x = k * y) \\
\Rightarrow y \leq x
\end{aligned}
$$

- Objectifs du cours
  - 3. Évaluer une formule mathématique
    - (voir si elle est vraie ou fausse, ou satisfaisable)
    - Parfois à l'aide d'outils de vérification (Tarski-UdeS, Pro-B)

- Objectifs du cours
  - 4. Prouver des énoncés.
    - 4.1: En langue naturelle:
    - **Théorème**: La somme de deux nombres entiers pairs est un nombre pair.
    - *Preuve.* Soit x et y deux nombres entiers pairs. Puisque x est pair, il existe un entier i tel que $x = 2i$. De la même façon, il existe un entier j tel que $y = 2j$. La somme de x et y est donc $x + y = 2i + 2j = 2(i + j)$. Puisque $x + y$ est un multiple de 2, la somme de x et y est paire.

- Objectifs du cours
  - Prouver des énoncés.
  - En symboles:

$$\begin{aligned}
&pair(x) \wedge pair(y) \\
&\Rightarrow \exists i,j \cdot x = 2i \wedge y = 2j \\
&\Rightarrow \exists i,j \cdot x + y = 2i + 2j \\
&\Rightarrow \exists i,j \cdot x + y = 2(i+j) \\
&\Rightarrow \exists k \cdot x + y = 2k \\
&\Rightarrow pair(x+y)
\end{aligned}$$

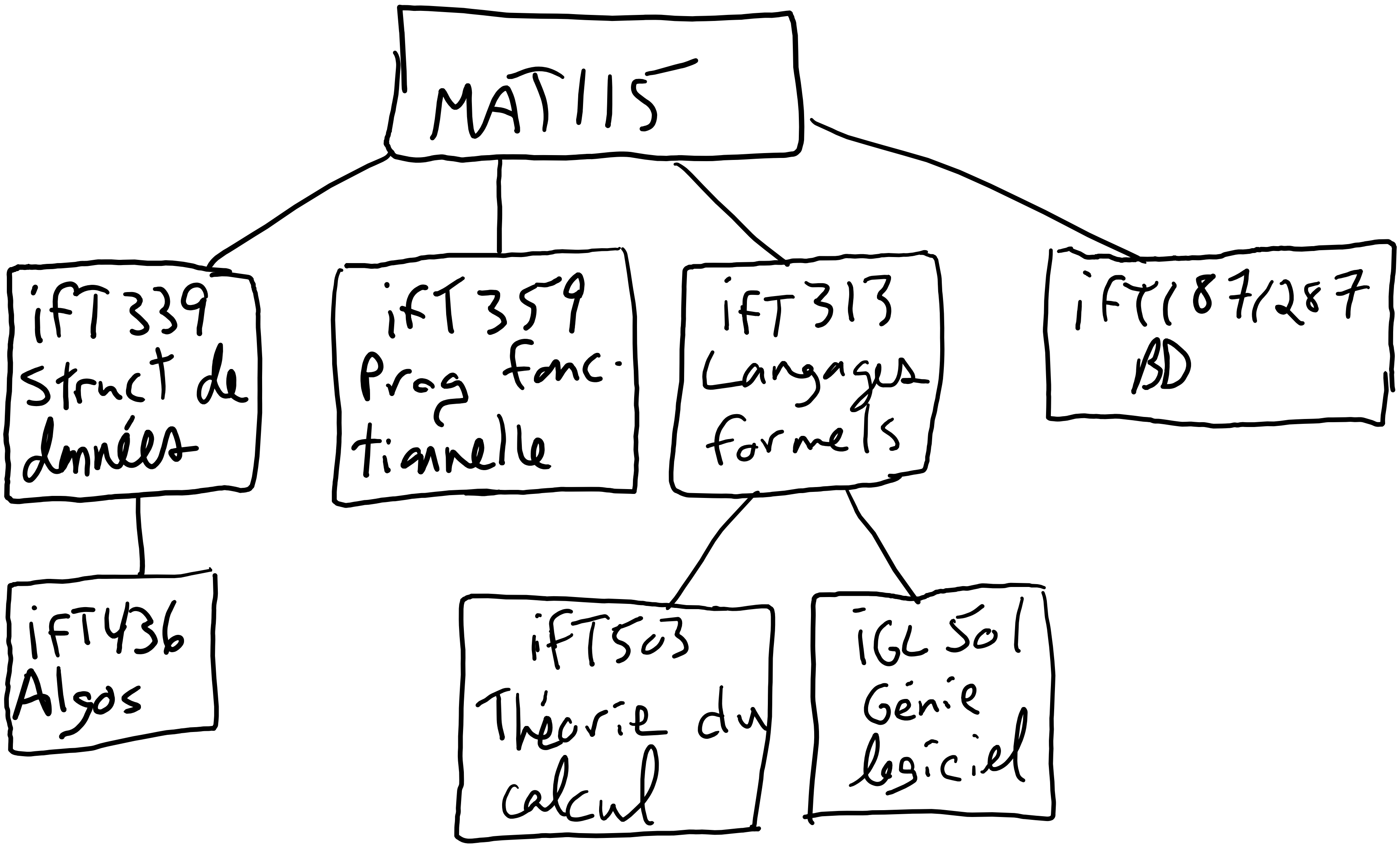
- Objectifs du cours
  - Prouver des énoncés.
  - En notation par séquents:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathrm{pair}(x)}{\exists i \cdot x = 2i} \qquad \dfrac{\mathrm{pair}(y)}{\exists j \cdot y = 2j}}{x + y = 2i + 2j}}{x + y = 2(i + j)}}{\exists k \cdot x + y = 2k}$$

- Buts en informatique de MAT115
  - développer une approche rigoureuse en programmation
  - pouvoir spécifier formellement le comportement attendu d'un programme
    - Permet ensuite de vérifier le programme

- Buts en informatique de MAT115
  - pouvoir démontrer qu'un algo fait ce qu'il prétend
  - pouvoir évaluer le temps qu’un algorithme
  - AVANT de le coder!

- Buts en informatique de MAT115
  - Et bien plus ...
    - comprendre les mécanismes internes d'un ordinateur (ordinateur = connecteurs logiques et, ou, xor, ...)
    - comprendre les bases de données relationnelles
    - comprendre les fondements de la théorie du calcul
      - Machines de Turing, complexité, décidabilité


MAT115
iFT339
Struct de
données
iFT359
Prog fonc-
tionnelle
iFT313
Langages
formels
iFT187/287
BD
iFT436
Algos
iFT503
Théorie du
calcul
IGL501
Génie
logiciel