MAT115 - Exercices sur les preuves en mathématiques discrètes

Manuel Lafond

Dans cette série d'exercices, il est attendu que vous donniez une preuve en langue naturelle (avec, bien sûr, le niveau de symbolisme requis pour une preuve suffisamment rigoureuse). Sauf indication contraire, tous les ensembles sont finis et n est un entier non-négatif.

Exercice 1: Dans les sous-questions qui suivent, vous pouvez utilisez sans preuve les faits que la somme de deux entiers pairs et paire, et que la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.

a. Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Si $a + b$ est impair, alors a est impair ou b est impair.

b. Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Si $a + b$ est pair et b est pair, alors a est pair.

c. Soit n un entier positif. Montrez que n est pair si et seulement si $7n + 4$ est pair.

Exercice 2: Voici quelques questions que je vous suggère de prouver par contradiction. Attention de bien énoncer la négation.

a. Montrez que l'équation $10x + 5y = 1$ n'admet pas de solution avec $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, montrez que si x et y sont des entiers, alors $10x + 5y \neq 1$.

b. Plus généralement, montrez que si a, b, c sont des entiers tels que a, b ont un diviseur commun $d > c$, alors l'équation $ax + by = c$ n'admet pas de solution avec $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$.

c. Montrez que pour un entier positif n, si n^2 est impair, alors n est impair.

d. Montrez que pour tout entiers **distincts** x et y tels que $x > 0$ et $y > 0$, on a $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$.

Exercice 3: Montrez que pour deux ensembles finis X et Y, $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Exercice 4: Soient R_1 et R_2 deux relations homogènes sur S (donc $R_1 \subseteq S \times S$ et $R_2 \subseteq S \times S$).
Montrez que $R_1^{-1}; R_2^{-1} = (R_2; R_1)^{-1}$.

Rappel de la définition générale: si P et Q sont des relations homogènes sur S, alors

$$P; Q = \{(x, y) | \exists z \cdot ((x, z) \in P \wedge (z, y) \in Q)\}$$
$$P^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in P\}$$

Exercice 5: Dans les mêmes conditions que l'exercice précédent, montrez que $R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = (R_1 \cup R_2)^{-1}$.

Exercice 6: Soit S et T deux ensembles finis. Montrez qu'il existe une fonction bijective totale de S vers T si et seulement si $|S| = |T|$.
Note: cet exercice est assez difficile à démontrer rigoureusement. Vous pouvez sauter par-dessus si vous le désirez. L'énoncé sert toutefois à l'exercice suivant.

Exercice 7: Une séquence $(s_1, \ldots, s_n)$ de longueur n est *binaire* si $s_i \in \{0, 1\}$ pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On dénote par $B(n)$ l'ensemble des séquences binaires de longueur n.
Soit S un ensemble de taille n. Rappelons que $\mathbb{P}(S)$ dénote l'ensemble de tous les sous-ensembles de S. Montrez qu'il existe une bijection totale de $\mathbb{P}(S)$ vers $B(n)$. Déduisez ensuite que $|\mathbb{P}(S)| = 2^n$.

Exercice 8: Montrez par induction sur la taille de l'ensemble que pour tout ensemble fini S, $|\mathbb{P}(S)| = 2^n$.

Exercice 9: Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$, il existe un nombre premier $p > 1$ tel que p divise n.
Note: notez qu'un nombre est un diviseur de lui-même. Aussi, vous aurez peut-être besoin d'induction.

Exercice 10: Montrez que pour tout entier positif $n > 3$, on a $2^n < n! < n^n$.
Note: la notation $n!$ dénote le produit des n premiers entiers positifs, i.e. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Par exemple, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Ça se prête bien à l'induction.

Exercice 11: Montrez que pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
Note: vous aurez peut-être besoin d'induction.

Exercice 12: Montrez que pour tout entier $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.
Note: vous aurez peut-être besoin d'induction.

Exercice 13: Soit S un ensemble de taille n et k un entier. On dénote par $\binom{n}{k}$ le nombre de sous-ensembles de taille k de S. Notez que certain confondent la notation $\binom{n}{k}$ avec un vecteur de dimension 2. Dans le contexte de sous-ensembles, la notation $\binom{n}{k}$ se lit "k parmis n" et est une notation dédiée au nombre de sous-ensembles de taile k d'un ensemble de taille n.
On définit $\binom{n}{k} = 0$ si $k < n$ ou $k > n$.

a. Argumentez que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

b. Montrez que $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$.

   Notez que ceci n'est qu'une généralisation de la dernière question du devoir 3.

c. Déduidez que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

d. Montrez que $\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{k} = 2^n$.

   Suggestion: utilisez les exercices précédents.

Exercice 14: Montrez que si sept nombres distincts sont choisis parmi les nombres $1, 2, 3, \dots, 11$, alors la somme de deux des nombres choisis est 12.

Exercice 15: Supposez que $n \in \mathbb{N}$ n'est pas un nombre premier, avec $n > 1$. Montrez par contradiction que n a un diviseur d tel que $d \leq \sqrt{n}$.

Exercice 16: Montrez que dans une fête avec 6 personnes, il y a un groupe de 3 personnes qui sont amies mutuellement, ou bien un groupe de 3 personnes qui ne sont pas amies mutuellement.

Pour l'énoncer de façon un peu plus formelle, soit R une relation homogène symétrique sur un ensemble P de 6 éléments. Alors il existe $x, y, z \in P$ tels que $(x, y), (x, z), (y, z) \notin R$ ou $(x, y), (x, z), (y, z) \in R$.
Vous pouvez argumenter sur la version informelle ou formelle, à votre choix.

Exercice 17: Considérez les fonctions récursives suivantes.

- Soit f la fonction mathématique définie sur les entiers $n \geq 1$ comme suit:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-1) + 2n - 1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

  Montrez que $f(n) = n^2$ pour tout $n \geq 1$.

- Une puissance de 2 est un entier de la forme 2^k, où $k \geq 2$. Soit f la fonction mathématique définie l'ensemble des puissances de 2 comme suit:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2^0 = 1 \\ 4 \cdot f(n/2) & \text{si } n = 2^k, k \in \mathbb{N}, k > 0 \end{cases}$$

  Montrez que $f(n) = n^2$ pour tout $n \geq 1$ tel que n est une puissance de 2.

Exercice 18: Soit n un entier positif. Montrez que n est un multiple de 5 si et seulement si n^2 est un multiple de 5.

Exercice 19: Soit $S, T_1, T_2, \ldots, T_m$ des ensembles finis, où $m \geq 2$. Montrez que

$$S \cap (T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_m) = (S \cap T_1) \cup (S \cap T_2) \cup \ldots \cup (S \cap T_m)$$

Vous pouvez utiliser sans preuve le fait que pour trois ensembles A, B, C, il est vrai que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 20: Soit $n \geq 1$ un entier. Montrez que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercices impliquant des inégalités

Exercice 21: Soit X et Y des expressions algébriques telles que $X > 0, Y > 0$. Lequel de ces énoncés est vrai?

$$Y - \frac{X}{10} > Y - \frac{X}{5} \qquad\qquad Y - \frac{X}{10} > Y - \frac{X}{20}$$

Exercice 22: Montrez que si $n \geq 4$ est un entier, alors $n^2 - 1 \geq 3n$. Utilisez une preuve par chaîne d'inégalités, par contradiction, puis par induction.

Exercice 23: Montrez par preuve directe que si $n > 3$ est un entier, alors $n^2 + 5n < n^3 - n$.

Exercice 24: Soit r, s des réels tels que $0 \leq r < s$. Alors $\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}$.

Exercice 25: Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des entiers positifs, avec $n \geq 1$. Montrez que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

C'est-à-dire, la somme des carrés est inférieure ou égale au carré de la somme.