MAT115 - Exercices sur les preuves en mathématiques discrètes

Manuel Lafond

Dans cette série d'exercices, il est attendu que vous donniez une preuve en langue naturelle (avec, bien sûr, le niveau de symbolisme requis pour une preuve suffisamment rigoureuse). Sauf indication contraire, tous les ensembles sont finis et n est un entier non-négatif.

Exercice 1: Dans les sous-questions qui suivent, vous pouvez utilisez sans preuve les faits que la somme de deux entiers pairs et paire, et que la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.

a. Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Si $a + b$ est impair, alors a est impair ou b est impair.

Solution.
On peut prouver cet énoncé par contraposition (rappel: $A \Rightarrow B$ est équivalent à $\neg B \Rightarrow \neg A$).

On montre que si la négation de "a est impair ou b est impair" est vraie, alors la négation de "$a + b$ est impair" est vraie. Ceci est équivalent à montrer que si a est pair et b est pair, alors $a + b$ est pair.

Ceci a été démontré en classe. Il n'y a donc rien de plus à prouver.

$\square$

b. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a + b$ est pair et b est pair, alors a est pair.

Solution.
Soit a, b tels que $a + b$ et b sont pairs. Alors il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $a + b = 2x$ et $b = 2y$. On a

$$a = (a + b) - b = 2x - 2y = 2(x - y)$$

et, puisque a est un multiple de 2, on voit que a est pair.

$\square$

c. Soit n un entier positif. Montrez que n est pair si et seulement si $7n+4$ est pair.

Solution.
Rappelons qu'une façon de prouver une équivalence $A \Leftrightarrow B$ est de prouver $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ séparément. C'est l'approche que l'on aborde ici.

($\Rightarrow$) On montre d'abord que si n est pair, alors $7n+4$ est pair. Soit n un entier positif pair. Alors il existe x tel que $n = 2x$. Il s'ensuit que

$$7n + 4 = 7 \cdot 2x + 4 = 14x + 4 = 2 \cdot (7x + 2)$$

et donc $7n+4$ est pair.

($\Leftarrow$) On montre que si $7n+4$ est pair, alors n est pair. Supposons pour fins de contradiction que $7n+4$ est pair mais que n est impair (exercice: assurez-vous que c'est bel et bien la négation). Il existe donc des entiers x, y tels que $7n+4 = 2x$ et $n = 2y+1$. En remplaçant n par sa valeur, on obtient

$$7n+4 = 7\cdot(2y+1)+4 = 14y+11 = 14y+10+1 = 2\cdot(7x+5)+1 = 2b+1$$

avec $b = 7x+5$. On se rappelle que $7n+4 = 2x$, et on a alors $2x = 2b+1$. Ceci est une contradiction, puisqu'un nombre pair $(2x)$ ne peut pas être égal à un nombre impair $(2b+1)$.

Notez que vous auriez pu faire une preuve par contraposée.

$\square$

Exercice 2: Voici quelques questions que je vous suggère de prouver par contradiction. Attention de bien énoncer la négation.

a. Montrez que l'équation $10x + 5y = 1$ n'admet pas de solution avec $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, montrez que si x et y sont des entiers, alors $10x + 5y \neq 1$.

Solution.
Supposons pour fins de contradiction qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $10x + 5y = 1$. En divisant par 5 des deux côtés, on obtient $2x + y = \frac{1}{5}$. Cette égalité est impossible, car $2x+y$ est un entier puisque $x, y \in \mathbb{Z}$, alors que

$\frac{1}{5}$ n'est pas un entier. On a atteint une contradiction, et donc l'énoncé original devait être vrai.

$\square$

b. Plus généralement, montrez que si a, b, c sont des entiers tels que a, b ont un diviseur commun $d > c$, alors l'équation $ax + by = c$ n'admet pas de solution avec $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$.

<u>Solution</u>.
La même preuve fonctionne. Supposons pour fins de contradiction que a, b ont un diviseur commun $d > c$, mais qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = c$. Puisque d est un diviseur commun, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $a = pd$ et $b = qd$. On aurait donc

$$\begin{aligned} & ax + by = c \\ \Leftrightarrow \; & pd \cdot x + qd \cdot y = c \\ \Leftrightarrow \; & px + qy = \frac{c}{d} \end{aligned}$$

car $px + qy$ est un entier puisque $p, q, x, y \in \mathbb{Z}$, alors que $\frac{c}{d}$ n'est pas un entier étant donné que $d > c$. On a atteint une contradiction, et donc l'énoncé original devait être vrai.

$\square$

c. Montrez que pour un entier positif n, si n^2 est impair, alors n est impair.

<u>Solution</u>.
(ceci a été fait en classe)

Supposons pour fins de contradiction qu'il existe un n tel que n^2 est impair mais que n est pair. Donc $n = 2x$ pour un certain entier x. On a ensuite

$$n^2 = (2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 2 \cdot (2x^2)$$

ce qui veut dire que n^2 est pair. Ceci est une contradiction.

Notez qu'on aurait aussi pu faire une preuve par contraposition. $\square$

d. Montrez que pour tout entiers **distincts** x et y tels que $x > 0$ et $y > 0$, on a $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$.

<u>Solution</u>.
Supposons pour fins de contradiction qu'il existe deux entiers distincts

x, y avec $x > 0, y > 0$ tels que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq 2$ (ce qui est la négation de l'énoncé).

Avec quelques manipulations, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq 2 & \\
\Leftrightarrow\ & x + \frac{y^2}{x} \leq 2y & \text{(multiplier par } y\text{)} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 \leq 2xy & \text{(multiplier par } x\text{)} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 - 2xy \leq 0 & \text{(soustraire } 2xy\text{)} \\
\Leftrightarrow\ & (x - y)^2 \leq 0 & \text{(factoriser)}
\end{aligned}
$$

Notez que l'on doit supposer que $x > 0$ et $y > 0$, car sinon la multiplication par un nombre négatif changerait le sens de l'inégalité.

Pour que $(x - y)^2 \leq 0$ soit vrai, il faut que $x = y$. En effet, si ce n'est pas le cas, $x - y$ sera différent de 0, et prendre $(x - y)^2$ sera plus grand que 0. Ceci est contradiction, car on suppose que x et y sont distincts.

$\square$

Exercice 3: Montrez que pour deux ensembles finis X et Y, $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Solution.
Soit $x \in X \cup Y$. On considère la contribution de x dans la somme $|X| + |Y|$. Si $x \in X \cap Y$, l'élément x est compté deux fois dans $|X| + |Y|$. Si $x \notin X \cap Y$, alors x est compté une fois dans $|X| + |Y|$ (soit dans $|X|$ ou dans $|Y|$, mais pas les deux). Donc, $|X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y|$, car chaque élément de $X \cup Y$ a été compté dans $|X| + |Y|$, et où le dernier terme est présent car chaque élément de l'intersection a été compté une fois en trop. En soustrayant $|X \cap Y|$ des deux côtés de l'égalité, on obtient l'énoncé désiré. $\square$

Exercice 4: Soient R_1 et R_2 deux relations homogènes sur S (donc $R_1 \subseteq S \times S$ et $R_2 \subseteq S \times S$).
Montrez que $R_1^{-1}; R_2^{-1} = (R_2; R_1)^{-1}$.

Rappel de la définition générale: si P et Q sont des relations homogènes sur

S, alors

$$P;Q = \{(x,y) | \exists z \cdot ((x,z) \in P \wedge (z,y) \in Q)\}$$
$$P^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in P\}$$

Solution.
Ceci est un exemple de preuve qui se démontre plus aisément avec une chaîne d'équivalence. Nous allons montrer que $(x,y) \in R_1^{-1}; R_2^{-1}$ si et seulement si $(x,y) \in (R_2; R_1)^{-1}$, montrant ainsi que le contenu des deux relations est le même. On a

$$\begin{aligned}
(x,y) \in R_1^{-1}; R_2^{-1} &\Leftrightarrow \exists z \cdot (x,z) \in R_1^{-1} \wedge (z,y) \in R_2^{-1} && \text{(par déf de ;)} \\
&\Leftrightarrow \exists z \cdot (z,x) \in R_1 \wedge (y,z) \in R_2 && \text{(par déf de } R^{-1}\text{)} \\
&\Leftrightarrow \exists z \cdot (y,z) \in R_2 \wedge (z,x) \in R_1 && \\
&\Leftrightarrow (y,x) \in R_2; R_1 && \text{(par déf de ;)} \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (R_2; R_1)^{-1} && \text{(par déf de } R^{-1}\text{)}
\end{aligned}$$

□

Exercice 5: Dans les mêmes conditions que l'exercice précédent, montrez que $R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = (R_1 \cup R_2)^{-1}$.

Solution.
Ceci est un autre exemple de preuve qui se démontre plus aisément avec une chaîne d'équivalence. Nous allons montrer que $(x,y) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ si et seulement si $(x,y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1}$, montrant ainsi que le contenu des deux relations est le même. On a

$$\begin{aligned}
(x,y) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1} &\Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \vee (x,y) \in R_2^{-1} && \text{(par déf de l'union)} \\
&\Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \vee (y,x) \in R_2 && \text{(par déf de l'inverse)} \\
&\Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \cup R_2 && \text{(par déf de l'union)} \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} && \text{(par déf de l'inverse)}
\end{aligned}$$

□

Exercice 6: Soit S et T deux ensembles finis. Montrez qu'il existe une fonc-

tion bijective totale de S vers T si et seulement si $|S| = |T|$.
Note: cet exercice est assez difficile à démontrer rigoureusement. Vous pouvez sauter par-dessus si vous le désirez. L'énoncé sert toutefois à l'exercice suivant.

Solution.
On prouve les deux directions de l'équivalence séparément.
($\Rightarrow$) Supposons qu'il existe une bijection totale de S vers T. Appelons cette fonction $f \subseteq S \times T$. Pour $x \in S$, on va dénoter par $f(x)$ l'unique élément y tel que $(x, y) \in f$ (cet élément y est unique car f est une fonction, et il existe car f est totale).
Soit $f(x)$. Puisque f est injective, il n'y a pas d'élément $x' \neq x$ tel que $f(x') = f(x)$. Donc chaque x pointe sur un y différent, ce qui implique que $|T| \geq |S|$. De plus, puisque f est surjective, pour chaque $y \in T$, il y a un élément $x \in S$ tel que $f(x) = y$. Puisque f est une fonction, chaque x peut couvrir un seul élément de T, ce qui est seulement possible si $|S| \geq |T|$ (pour qu'il y ait assez d'éléments dans S pour couvrir tous les éléments de T).
On a montré que $|T| \geq |S|$ et $|S| \geq |T|$. La seule possibilité est que $|S| = |T|$.

($\Leftarrow$) Supposons que $|S| = |T|$. On définit $n = |S|$ (et donc $n = |T|$). On assigne à chaque élément de S un indice arbitraire et on dénote $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. On fait de même avec T et on dénote $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Soit f définie par

$$f = \{(s_i, t_i) \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

On voit que f est une fonction totale car chaque s_i est en relation avec exactement un élément de T. De plus, f est injective car chaque s_i est en couple un son propre t_i, et f est surjective car chaque t_i est dans un couple. Il existe donc une bijection totale, ce qu'il fallait démontrer.

□

Exercice 7: Une séquence $(s_1, \dots, s_n)$ de longueur n est *binaire* si $s_i \in \{0, 1\}$ pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. On dénote par $B(n)$ l'ensemble des séquences binaires de longueur n.
Soit S un ensemble de taille n. Rappelons que $\mathbb{P}(S)$ dénote l'ensemble de tous les sous-ensembles de S. Montrez qu'il existe une bijection totale de $\mathbb{P}(S)$ vers $B(n)$. Déduisez ensuite que $|\mathbb{P}(S)| = 2^n$.

Solution.
L'idée est d'associer chaque $X \subseteq S$ au vecteur de 0 et 1 correspondant à l'absence/présence de chaque élément de S dans X. Notez qu'il y a plusieurs

façon de formuler l'argument suivant — si vous arriviez à formuler une idée similaire dans vos mots, c'est bien!
On attribue d'abord un indice arbitraire à chaque élément de S, et on dénote $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (j'utilise x_i au lieu de s_i pour éviter la confusion avec les séquences binaires). Pour $X \in \mathbb{P}(S)$ et $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on définit

$$\alpha_i(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \notin X \\ 1 & \text{si } x_i \in X \end{cases}$$

On définit la bijection f suivante de $\mathbb{P}(S)$ vers $B(n)$. Pour chaque $X \subseteq S$, on ajoute à f le couple

$$(X, (\alpha_1(X), \alpha_2(X), \ldots, \alpha_n(X))$$

qui est le seul couple de f contenant X.
Notez que f est bien une fonction totale de $\mathbb{P}(S)$ vers $B(n)$. Pour voir qu'elle est injective, on remarque que si on a deux sous-ensembles distincts X, X' de S, il y a un élément x_i qui est dans un des deux sous-ensembles mais pas dans l'autre, impliquant que la séquence binaire qui leur est associée est distincte. Donc, il n'y a pas deux X, X' en relation avec le même élément de $B(n)$. Pour voir que f est surjective, si on considère une séquence $(s_1, \ldots, s_n) \in B(n)$, on voit que $X = \{x_i \mid s_i = 1\}$ est en relation avec cette séquence. Donc chaque élément de $B(n)$ est dans un couple. On déduit que f est une bijection totale.
Pour déduire que $\mathbb{P}(S) = 2^n$, on remarque que $B(n) = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}$, c'est-à-dire le produit cartésien de $\{0,1\}$ répété n fois. Le nombre d'éléments dans cet ensemble est $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. Par l'exercice précédent, l'existence de la bijection totale de $\mathbb{P}(S)$ vers $B(n)$ implies que $\mathbb{P}(S) = 2^n$.

□

Exercice 8: Montrez par induction sur la taille de l'ensemble que pour tout ensemble fini S, $|\mathbb{P}(S)| = 2^n$.

Solution.
On prouve l'énoncé par induction sur n.
Cas de base: $n = 0$. On a $2^0 = 1$. De même, si S est un ensemble de taille 0, son seul sous-ensemble est $\emptyset$, et donc $|\mathbb{P}(S)| = 1$.
Induction: on suppose que si S' est un ensemble de taille $n-1$, alors il y a 2^{n-1} sous-ensembles possibles de S'.
Soit S un ensemble de taille $n \geq 1$. On veut prouver qu'il y a 2^n sous-ensembles

de S.
Soit $x \in S$ un élément quelconque de S (notez que x existe car $n \geq 1$). Soit $S' = S \setminus \{x\}$. Par hypothèse d'induction, $|\mathbb{P}(S')| = 2^{n-1}$.
Maintenant, on remarque qu'il y a deux types de sous-ensembles de S: ceux qui contiennent x, et ceux qui ne contiennent pas x. Ceux qui ne contiennent pas x sont précisément les sous-ensembles de S' et il y en a 2^{n-1}. De plus, ceux qui contiennent x peuvent tous être obtenus en prenant un sous-ensemble de S' en lui ajoutant x. Donc, le nombre de sous-ensembles de S qui contiennent x est aussi 2^{n-1}. On déduit que le nombre de sous-ensembles de S est $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, tel que désiré. $\square$

Exercice 9: Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$, il existe un nombre premier $p > 1$ tel que p divise n.
Note: notez qu'un nombre est un diviseur de lui-même. Aussi, vous aurez peut-être besoin d'induction.

Solution.

On procède par induction forte sur n.

Cas de base. Comme cas de base, on considère $n = 2$. On voit que $p = 2$ divise 2 et 2 est un nombre premier.

Induction. On veut maintenant montrer que l'énoncé est vrai pour $n > 2$. On suppose maintenant par induction (forte) que l'énoncé est vrai pour tout m entre 2 et $n - 1$. Si n est un nombre premier, il est divisible par n, qui est un nombre premier, et donc l'énoncé est vrai. Sinon, n est un nombre composé, et donc par définition d'un nombre composé, il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n = a \cdot b$ et tels que $2 \leq a < n$ et $2 \leq b < n$.
On peut donc appliquer l'induction sur a (ou sur b, mais traiter a est suffisant ici). Par hypothèse d'induction, a est divisible par un nombre premier p, et donc $a = p \cdot c$ pour un certain entier c (possiblement $c = 1$ si a était déjà premier, ce qui n'est pas un problème). Donc, $n = a \cdot b = p \cdot c \cdot b$, ce qui montre que n est un multiple de p, et donc n est divisible par un nombre premier p.

Commentaire. Cette preuve est complète, mais tel que mentionné en classe, lorsque l'on utilise l'induction forte on peut se demander si chaque cas est bel et bien couvert. Le cas $n = 2$ est couvert par le cas de base, et les arguments utilisés dans l'induction sont vrais pour tout $n > 2$. Il n'y a donc pas de problème lié à l'induction forte ici car chaque n est couvert. $\square$

Exercice 10: Montrez que pour tout entier positif $n > 3$, on a $2^n < n! < n^n$. *Note:* la notation $n!$ dénote le produit des n premiers entiers positifs, i.e. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Par exemple, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Ça se prête bien à l'induction.

<u>Solution</u>.
Cet énoncé cache en fait deux éléments à démontrer. Il faut prouver que $2^n < n!$ et que $n! < n^n$ (lorsque $n > 3$).
On montre d'abord que $2^n < n!$ par induction sur n.

Cas de base: $n = 4$. On a $2^4 = 16$ et $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. L'énoncé est correct car $16 < 24$.

Induction: on suppose que $n > 4$ et que l'énoncé est vrai pour $n-1$, et donc que $2^{n-1} < (n-1)!$. On veut montrer que $2^n < n!$. On remarque que

$$\begin{aligned}
2^n &= 2 \cdot 2^{n-1} \\
&< 2 \cdot (n-1)! && \text{(par hypothèse d'induction)} \\
&< n \cdot (n-1)! && \text{(car } 2 < n\text{)} \\
&= n!
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.
Il faut ensuite montrer que $n! < n^n$ pour $n > 3$. Ceci peut se faire par preuve directe. On remarque que

$$\begin{aligned}
n! &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\
&< n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n && \text{(multiplié } n \text{ fois)} \\
&= n^n
\end{aligned}$$

où l'inégalité à la deuxième ligne est justifiée par le fait que $n-1 < n, n-2 < n$, etc. $\square$

Exercice 11: Montrez que pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
Note: vous aurez peut-être besoin d'induction.

<u>Solution</u>.
On procède par induction sur n.

Cas de base. Lorsque $n = 1$, on a $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ et de l'autre côté, $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, ce qui démontre l'égalité.

Induction. On veut montrer que l'énoncé est vrai pour $n > 1$. On suppose par induction que $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. En utilisant cette hypothèse, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i &= 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i + n \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + n && \text{par hypothèse d'induction} \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n}{2} \\
&= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\
&= \frac{n(n-1+2)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

□

Exercice 12: Montrez que pour tout entier $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.
Note: vous aurez peut-être besoin d'induction.

Solution.
On procède par induction sur n.

Cas de base. $n = 0$. On a $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0 = 1$. Ceci est égal à $2^{n+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$.

Induction. On veut montrer que l'énoncé est vrai pour $n > 0$. On suppose par induction que l'énoncé est vrai pour $n-1$, ce qui veut dire que $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^{(n-1)+1} - 1 = 2^n - 1$.

On a

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} 2^i &= 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n \\
&= 2^n - 1 + 2^n && \text{par hypothèse d'induction} \\
&= 2 \cdot 2^n - 1 \\
&= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

□

Exercice 13: Soit S un ensemble de taille n et k un entier. On dénote par $\binom{n}{k}$ le nombre de sous-ensembles de taille k de S. Notez que certain confondent la notation $\binom{n}{k}$ avec un vecteur de dimension 2. Dans le contexte de sous-ensembles, la notation $\binom{n}{k}$ se lit "k parmis n" et est une notation dédiée au nombre de sous-ensembles de taile k d'un ensemble de taille n.
On définit $\binom{n}{k} = 0$ si $k < n$ ou $k > n$.

a. Argumentez que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Solution.
La valeur de $\binom{n}{0}$ est le nombre de sous-ensembles de taille 0 de S. On remarque que $\emptyset$ est le seul sous-ensemble possible, d'où $\binom{n}{0} = 1$.

Similairement, $\binom{n}{n}$ est le nomre de sous-ensembles de taille n. Il n'y a qu'un seul sous-ensemble possible, celui qui contient tous les éléments.

□

b. Montrez que $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Notez que ceci n'est qu'une généralisation de la dernière question du devoir 3.

Solution.
On s'intéresse d'abord à construire une séquence de k éléments de S, telle que chaque élément de la séquence est distinct. On a n choix pour le premier élément, puis $n-1$ choix pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'à $(n-k+1)$ choix pour le k-ième élément. Le nombre de telles séquences

est donc $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$. Pour chaque $X \subseteq S$ de taille k, on a $k!$ permutations de X. Donc chaque sous-ensemble de taille k est compté exactement $k!$ fois dans l'ensemble des séquences énumérées ci-haut. Il faut donc diviser par $k!$ pour éliminer les permutations comptées en trop. $\square$

c. Déduidez que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Solution.
Ceci n'est qu'une manipulation du numéro précédent.

$$\begin{aligned}\frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

$\square$

d. Montrez que $\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Suggestion: utilisez les exercices précédents.

Solution.
La sommation addition d'abord le nombre de sous-ensembles de taille 0, puis le nombre de sous-ensembles de taille 1, et ainsi de suite jusqu'au nombre de sous-ensembles de taille n. Donc, la somme additionne le nombre de sous-ensembles pour chaque taille possible — impliquant que la somme est en fait le nombre total de sous-ensembles de S. On a vu dans les exercices précédents que ce nombre est 2^n. $\square$

Exercice 14: Montrez que si sept nombres distincts sont choisis parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, 11$, alors la somme de deux des nombres choisis est 12.

Solution.
On pourrait imaginer une preuve directe, mais ici je vous propose une preuve par contradiction afin de pratiquer cette technique.
Supposons pour fins de contradiction qu'on puisse choisir un ensemble X de 7 nombres parmi $\{1, 2, \ldots, 11\}$ sans avoir de paire qui somme à 12. Indépendamment

de X, il y a 5 paires $p_1 = \{1, 11\}, p_2 = \{2, 10\}, p_3 = \{3, 9\}, p_4 = \{4, 8\}, p_5 = \{5, 7\}$ d'entiers dont la somme est 12 ($1 + 11$, $2 + 10$, etc.), et aucune de ces paires n'intersecte. Par supposition, pour chaque paire p_i, il y a un élément de p_i qui n'est pas dans X. Puisque les p_i n'ont pas d'intersection, ceci veut dire qu'il y a au moins 5 éléments parmi $\{1, 2, \dots, 11\}$ qui ne sont pas dans X, un par p_i. Donc, X contient 7 éléments parmi $\{1, 2, \dots, 11\}$, et au moins 5 éléments de $\{1, 2, \dots, 11\}$ ne sont pas dans X. Ceci voudrait dire que $|\{1, 2, \dots, 11\}| \geq 7 + 5 = 12$. Ceci est impossible. On déduit de cette contradiction que X ne peut pas exister, et donc que l'énoncé est vrai. $\square$

Exercice 15: Supposez que $n \in \mathbb{N}$ n'est pas un nombre premier, avec $n > 1$. Montrez par contradiction que n a un diviseur d tel que $d \leq \sqrt{n}$.

<u>Solution</u>.

Supposons pour fins de contradiction que l'énoncé est faux. Prenons le temps de bien établir sa négation (ce que nous ne ferons pas toujours!). L'énoncé dit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ n'est pas premier} \Rightarrow \exists \text{ diviseur } d \text{ de } n \text{ avec } d \leq \sqrt{n})$$

Soit p le prédicat "n n'est pas premier" et q le prédicat "$\exists$ diviseur d de n avec $d \leq \sqrt{n}$". L'énoncé ci-haut peut donc se lire comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, p \Rightarrow q$$

Pour fins de contradiction, on doit prendre la négation de l'énoncé plus haut, qui est $\neg(\forall n \in \mathbb{N}, p \Rightarrow q)$, qui devient $\exists n \in \mathbb{N}, \neg(p \Rightarrow q)$.
La négation d'une implication $p \Rightarrow q$ est $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.
Dans notre problème, prendre la négation en revient à dire

$$\exists n \in \mathbb{N}, p \wedge \neg q$$

En ramenant p et q, notre point de démarrage pour la contradiction est donc la supposition:

$$\exists n \in \mathbb{N}, (n \text{ n'est pas premier} \wedge \neg(\exists \text{ diviseur } d \text{ de } n \text{ avec } d \leq \sqrt{n}))$$

En d'autres termes, on suppose qu'il existe un n tel que n n'est pas premier,

mais que tout diviseur d de n est tel que $d > \sqrt{n}$. Avec cette supposition, soit d le plus petit diviseur de n (différent de 1). Donc, il existe un entier k tel que $n = d \cdot k$. De plus, puisque d est le plus petit diviseur, $k \geq d$. Par supposition, $d > \sqrt{n}$, et donc $k \geq d > \sqrt{n}$. Il s'ensuit que $d \cdot k > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Donc $d \cdot k > n$, mais on avait $d \cdot k = n$. Ceci est une contradiction. On peut donc affirmer que la négation de l'énoncé est impossible, ce qui montre que l'énoncé est vrai.
Notez qu'un epreuve normale n'a pas besoin de tout le cheminement pour exprimer la négation. Une preuve normale pourrait commencer au dernier paragraphe ci-haut. $\square$

Exercice 16: Montrez que dans une fête avec 6 personnes, il y a un groupe de 3 personnes qui sont amies mutuellement, ou bien un groupe de 3 personnes qui ne sont pas amies mutuellement.
Pour l'énoncer de façon un peu plus formelle, soit R une relation homogène symétrique sur un ensemble P de 6 éléments. Alors il existe $x, y, z \in P$ tels que $(x, y), (x, z), (y, z) \notin R$ ou $(x, y), (x, z), (y, z) \in R$.
Vous pouvez argumenter sur la version informelle ou formelle, à votre choix.

Solution.
Prenons n'importe quelle personne, disons Alice. On sait que Alice a soit au moins 3 amis dans le groupe, ou bien au moins 3 non-amis dans le groupe (puisqu'il y a 5 personnes autres que Alice). Supposons d'abord que Alice a 3 amis x, y et z. Si deux de ces personnes sont amies, disons x et y, alors $\{Alice, x, y\}$ forment un groupe de 3 personnes mutuellement amies. Dans ce cas, la preuve est terminée car on a trouvé le groupe recherché. On va donc supposer qu'il n'y a pas deux personnes qui sont amies parmi x, y et z. Ceci veut dire que x, y et z forment un groupe de 3 personnes mutuellement non-amies. On a donc encore une fois trouvé le groupe recherché.
Si on suppose plutôt que Alice a 3 non-amis, la preuve est identique[1]. $\square$

Exercice 17: Considérez les fonctions récursives suivantes.

[1] Ceci est un argument correct ici puisque c'est évident. Mais attention de ne pas prendre de raccourcis comme ça lorsque ce n'est pas approprié. Dans le doute, détaillez.

- Soit f la fonction mathématique définie sur les entiers $n \geq 1$ comme suit:

  $$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-1) + 2n - 1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

  Montrez que $f(n) = n^2$ pour tout $n \geq 1$.

  <u>Solution</u>.
  On procède par induction sur n.

  Cas de base. $n = 1$. On a $f(1) = 1$ par définition, et $n^2 = 1$. Donc l'égalité est respectée.

  Induction. On suppose que $n \geq 2$ et que l'énoncé est vrai pour $n - 1$, c'est-à-dire que $f(n-1) = (n-1)^2$. Par la définition de f, on a

  $$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + 2n - 1 \\ &= (n-1)^2 + 2n - 1 \text{par H.I.} \\ &= n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

  $\square$

- Une puissance de 2 est un entier de la forme 2^k, où $k \geq 2$. Soit f la fonction mathématique définie l'ensemble des puissances de 2 comme suit:

  $$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2^0 = 1 \\ 4 \cdot f(n/2) & \text{si } n = 2^k, k \in \mathbb{N}, k > 0 \end{cases}$$

  Montrez que $f(n) = n^2$ pour tout $n \geq 1$ tel que n est une puissance de 2.

<u>Solution</u>.
On procède par induction (forte) sur n.
Cas de base. $n = 2^0 = 1$. On a $f(1) = 1$ par définition, et $n^2 = 1$. Donc l'égalité est respectée.
Induction. On suppose que $n \geq 2$ est une puissance de 2, et que l'énoncé est vrai tout $m < n$ tel que m est une puissance de 2, c'est-à-dire que $f(m) = m^2$

si m est une puissance de 2. Par la définition de f, on a

$$\begin{aligned} f(n) &= 4 \cdot f(n/2) \\ &= 4 \cdot (n/2)^2 \text{par H.I.} \\ &= 4 \cdot n^2/2^2 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Commentaire. Notez qu'il était légal d'appliquer l'hypothèse d'induction sur $f(n/2) = (n/2)^2$, car si $n = 2^k$, alors $n/2 = 2^{k-1}$ est aussi une puissance de 2. Si n avait été impair, l'hypothèse d'induction n'aurait pas été applicable. Pour cette raison, cet énoncé est beaucoup plus difficile à prouver si on considère tous les n, pas seulement les puissances de 2.

$\square$

Exercice 18: Soit n un entier positif. Montrez que n est un multiple de 5 si et seulement si n^2 est un multiple de 5.

Solution.
On montre les deux côtés de l'équivalence séparément.
($\Rightarrow$) Si n est un multiple de 5, alors $n = 5k$ pour un entier k. On a $n^2 = (5k)^2 = 25k^2$, qui est un multiple de 5.
($\Leftarrow$) On prouve l'énoncé par contraposition. On montre que si n n'est *pas* un multiple de 5, alors n^2 n'est pas un multiple de 5.
Si n n'est pas un multiple de 5, alors $n = 5k + a$ pour un entier k et $a \in \{1, 2, 3, 4\}$. On a donc

$$n^2 = (5k + a)^2 = 25k^2 + 10ka + a^2$$

Puisque $25k^2 + 10ka$ est un multiple de 5, on peut écrire $n^2 = 5h + a^2$ pour un entier h. On épuise les cas possibles pour a:

- si $a = 1$, alors $n^2 = 5h + 1$ n'est pas un multiple de 5;
- si $a = 2$, alors $n^2 = 5h + 2^2 = 5h + 4$ n'est pas un multiple de 5;
- si $a = 3$, alors $n^2 = 5h + 3^2 = 5h + 9 = 5h + 5 + 4 = 5(h + 1) + 4$ n'est pas un multiple de 5;
- si $a = 4$, alors $n^2 = 5h + 4^2 = 5h + 16 = 5h + 15 + 1 = 5(h + 3) + 1$ n'est pas un multiple de 5.

Ayant épuisé toutes les possibilités, on déduit que n^2 n'est pas un multiple de 5. $\square$

Exercice 19: Soit $S, T_1, T_2, \ldots, T_m$ des ensembles finis, où $m \geq 2$. Montrez que

$$S \cap (T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_m) = (S \cap T_1) \cup (S \cap T_2) \cup \ldots \cup (S \cap T_m)$$

Vous pouvez utiliser sans preuve le fait que pour trois ensembles A, B, C, il est vrai que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

<u>Solution</u>.
On procède par induction sur m.

Cas de base: $m = 2$. On doit montrer que $S \cap (T_1 \cup T_2) = (S \cap T_1) \cup (S \cap T_2)$. Ceci est l'identité mentionnée dans l'exercice, avec $S = A, T_1 = B, T_2 = C$. Le cas de base est donc déjà prouvé.

Induction. On veut prouver l'énoncé pour $m > 2$. On suppose par induction que l'énoncé est vrai pour $m - 1$, c'est-à-dire que $S \cap (T_1 \cup \ldots \cup T_{m-1}) = (S \cap T_1) \cup \ldots \cup (S \cap T_{m-1})$.
Afin de prouver pour m, on définit $T^* = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_{m-1}$. On obtient que $S \cap (T_1 \cup \ldots \cup T_{m-1} \cup T_m)$ est égal à

$$\begin{aligned}
& S \cap (T^* \cup T_m) && \\
&= (S \cap T^*) \cup (S \cap T_m) && \text{identité de l'énoncé} \\
&= (S \cap (T_1 \cup \ldots \cup T_{m-1})) \cup (S \cap T_m) && \\
&= ((S \cap T_1) \cup (S \cap T_2) \cup \ldots \cup (S \cap T_{m-1})) \cup (S \cap T_m) && \text{hypothèse d'induction} \\
&= (S \cap T_1) \cup (S \cap T_2) \cup \ldots \cup (S \cap T_{m-1}) \cup (S \cap T_m) &&
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 20: Soit $n \geq 1$ un entier. Montrez que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

<u>Solution</u>.
On procède par induction sur n.
Cas de base. $n = 1$. La somme des $n = 1$ premiers carrés est $1^2 = 1$, et quand $n = 1$, on a $\frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$.
Induction. On suppose que $n > 1$ et que $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

Afin de montrer que l'énoncé est vrai pour n, on réécrit la manière suivante:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2$$

Nous avons ensuite:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2 && \text{par H.I.} \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1) + 6n^2}{6} \\
&= \frac{n((n-1)(2n-1) + 6n)}{6} && \text{factoriser } n \\
&= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} && \text{expansion de } (n-1)(2n-1) + 6n \\
&= \frac{n(2n^2 + n + 2n + 1)}{6} \\
&= \frac{n(n(2n+1) + 2n + 1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Alternative. Ces quelques dernières étapes sont de l'ordre "il fallait y penser". Une autre façon de démontrer l'énoncé aurait été de d'abord établir que

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

et donc que qu'il est suffisant de démontrer que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$. On procède ensuite d'une manière similaire: nous avons ensuite:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2 && \text{par H.I.} \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1) + 6n^2}{6} \\
&= \frac{(n^2-n)(2n-1) + 6n^2}{6} \\
&= \frac{2n^3 - n^2 - 2n^2 + n + 6n^2}{6} \\
&= \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 6n^2}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer.

$\square$

Exercices impliquant des inégalités

Exercice 21: Soit X et Y des expressions algébriques telles que $X > 0, Y > 0$. Lequel de ces énoncés est vrai?

$$Y - \frac{X}{10} > Y - \frac{X}{5} \qquad\qquad Y - \frac{X}{10} > Y - \frac{X}{20}$$

__**Solution**__.
Ceci n'est pas une exercice de preuve, mais plutôt un simple exercice de raisonnement intuitif. Je présente donc ici une approche possible pour réfléchir à ce genre d'inégalité (toujours d'un point de vue intuitif).
Quand on passe de $\frac{X}{10}$ à $\frac{X}{5}$, on passe de quelque chose de "finement divisé" à quelque chose de "pas beaucoup divisé". Donc d'un point de vue relatif, $\frac{X}{10}$ est *petit* et $\frac{X}{5}$ est *grand*. Ensuite, quand on passe de $Y - \frac{X}{10}$ à $Y - \frac{X}{5}$, avant on retirait de Y une petite quantité, et après on retire une grande quantité. Ceci veut dire que $Y - \frac{X}{10}$ est plus grand que $Y - \frac{X}{5}$, car on retire moins dans le premier cas. Donc $Y - \frac{X}{10} > Y - \frac{X}{5}$ est vrai.
Dans l'autre cas, on peut réfléchir de façon similaire. On a que $\frac{X}{20}$ est plus finement divisé que $\frac{X}{10}$ et donc plus petit. D'un point de vue relatif, $\frac{X}{10}$ est grand et $\frac{X}{20}$ est petit. Donc, dans $Y - \frac{X}{10}$, on retire plus que $Y - \frac{X}{20}$, et donc $Y - \frac{X}{10} < Y - \frac{X}{20}$.
Notez que tout ceci pourrait se démontrer formellement avec les règles d'inégalités, ce que je vous laisse faire.

$\square$

Exercice 22: Montrez que si $n \geq 4$ est un entier, alors $n^2 - 1 \geq 3n$. Utilisez une preuve par chaîne d'inégalités, par contradiction, puis par induction.

__**Solution**__.
Preuve par chaîne d'inégalités.

$$\begin{aligned}
& n^2 - 1 & \\
\geq\ & n^2 - n & \text{car } n \geq 1 \\
=\ & n(n-1) & \\
\geq\ & n \cdot 3 & \text{car } n \geq 4 \Rightarrow n - 1 \geq 3 \\
=\ & 3n &
\end{aligned}$$

$\square$

Solution.
Preuve par contradiction.
On suppose pour fins de contradiction qu'il y a un entier $n \geq 4$ tel que $n^2 - 1 < 3n$. On obtient

$$\begin{aligned}
n^2 - 1 &< 3n && \\
n - \frac{1}{n} &< 3 && \text{division par } n \text{ chaque côté} \\
n &< 3 + \frac{1}{n} && \text{plus } 1/n \text{ chaque côté}
\end{aligned}$$

Puisque $n \geq 4$, on note que $3 + \frac{1}{n} < 4$ (car $1/n$ est clairement plus petit que 1). Donc, la seule façon pour que n soit plus petit que $3 + \frac{1}{n}$ est que $n \leq 3$. Ceci est en contradiction avec la supposition que $n \geq 4$. $\square$

Solution.
Preuve par induction.

Cas de base. si $n = 4$, alors $n^2 - 1 = 15$ et $3n = 12$, et l'inégalité est respectée.

Induction. on suppose que $n > 4$ et que $(n-1)^2 - 1 \geq 3(n-1)$. On veut montrer que $n^2 - 1 \geq 3n$. Une difficulté est de retrouver la forme $(n-1)^2$ à partir de $n^2 - 1$. Une façon est de trouver le x tel que

$$n^2 = (n-1)^2 + x$$

pour réécrire n^2. Il suffit d'isoler x:

$$\begin{aligned}
n^2 &= (n-1)^2 + x \\
n^2 &= n^2 - 2n + 1 + x \\
2n - 1 &= x
\end{aligned}$$

On veut donc montrer que

$$n^2 - 1 = (n-1)^2 + x - 1 = (n-1)^2 + (2n-1) - 1 \geq 3n$$

On peut prendre le raisonnement:

$$\begin{aligned}
& (n-1)^2 + (2n-1) - 1 \\
&= (n-1)^2 - 1 + (2n-1) \\
&\geq 3(n-1) + 2n - 1 && \text{par H.I.} \\
&= 3n - 3 + 2n - 1 \\
&= 3n + (2n-4) \\
&\geq 3n
\end{aligned}$$

où, pour justifier la dernière étape, on peut utiliser le fait que $2n - 4 \geq 0$ car $n > 4$.
Notez que l'on aurait pu faire une preuve par induction où on suppose l'énoncé vrai pour n, et on montre qu'il implique $n+1$. Ceci aurait probablement permis de sauter l'étape du x. $\square$

Exercice 23: Montrez par preuve directe que si $n > 3$ est un entier, alors $n^2 + 5n < n^3 - n$.

Solution.
Il serait attendu d'une preuve que l'on démarre de $n > 3$ et que l'on déduise $n^2 + 5n < n^3 - n$. Afin de gagner une intuition sur comment faire, on va démarrer de $n^2 + 5n < n^3 - n$ et voir ce qu'on peut en déduire. On pourra ensuite renverser les étapes.
On a

$$\begin{aligned}
n^2 + 5n &< n^3 - n \\
n + 5 &< n^2 - 1 && \text{division par } n \\
6 &< n^2 - n && +1 \text{ et } -n \text{ chaque côté} \\
6 &< n(n-1)
\end{aligned}$$

En réfléchissant, on voit que ceci doit être vrai car $n(n-1) > 3 \cdot 2$ (car $n > 3$ et $n - 1 > 2$).
Ceci n'était qu'une intuition. Pour une preuve directe complète, on renverse

les étapes. Pour une preuve complète, on a

$$\begin{aligned}
n &> 3 \\
n(n-1) &> 3 \cdot 2 && \text{car } n-1 > 2 \\
n(n-1) &> 6 \\
n^2 - n &> 6 \\
n^2 - 1 &> n + 5 && -1 \text{ et } +n \text{ chaque côté} \\
n^3 - n &> n^2 + 5n && \text{fois } n \text{ chaque côté}
\end{aligned}$$

□

Exercice 24: Soit r, s des réels tels que $0 \leq r < s$. Alors $\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}$.

Solution.
Je présente deux solutions. La première y va par contradiction.
Supposons que $0 \leq r < s$ mais que $\frac{r}{1+r} \geq \frac{s}{1+s}$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{r}{1+r} &\geq \frac{s}{1+s} \\
r(1+s) &\geq s(1+r) \\
r + rs &\geq s + rs \\
r &\geq s
\end{aligned}$$

ce qui contredit $r < s$. Notez qu'il est nécessaire que $r \geq 0$ et $s \geq 0$. Si r était négatif, par exemple $r = -2$, on multiplierait par $1 + r = -1$ et il faudrait changer le sens des inégalités à la premère étape. □

Solution.
Solution alternative.
On utilise l'approche de démarrer de $\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}$ pour gagner une intuition, puis on renversera les étapes. C'est essentiellement la même idée, mais sans contradiction.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{r}{1+r} &< \frac{s}{1+s} \\
r(1+s) &< s(1+r) \\
r + rs &< s + rs \\
r &< s
\end{aligned}$$

En fait, ceci pourrait compter pour une preuve correcte car chaque étape est un $\Leftrightarrow$. Je l'accepterais, dans la mesure où chaque ligne montre que l'on déduit une équivalence (en ajoutant le $\Leftrightarrow$ au début de chaque ligne).
Pour une preuve en bonne et due forme, on pourrait toutefois faire:

$$\begin{aligned}
r &< s \\
r + rs &< s + rs \\
r(1+s) &< s(1+r) \\
\frac{r}{1+r} &< \frac{s}{1+s}
\end{aligned}$$

ce qui semble être la même chose dans cette question, mais ce n'est pas toujours le cas. Cette dernière forme est plus robuste, car on démarre de l'hypothèse et on a la bonne conclusion, au lieu de l'inverse. $\square$

Exercice 25: Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des entiers positifs, avec $n \geq 1$. Montrez que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

C'est-à-dire, la somme des carrés est inférieure ou égale au carré de la somme.

Solution.
Il est possible de faire une preuve par induction[2].
Je présente deux preuves, une plus verbale et l'autre (un peu) plus symboliqueé. On montre que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
Pour ce faire, on remarque que le carré des sommes est

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

[2] voir `https://math.stackexchange.com/questions/1180437/the-sum-of-the-squares-is-less-than-or-equal-to-the-square-of-the-sums-for-all-n`

Si on fait l'expansion de ce produit, le résultat contient n^2 termes et ils sont tous positifs, car les x_i sont tous positifs. Notamment, le terme $x_1 \cdot x_1$ apparaît, ainsi que le terme $x_2 \cdot x_2$, et ainsi de suite. Donc, l'expansion du produit additionne tous les termes x_i^2, plus d'autres termes positifs, et il est donc clair que le carré des sommes est plus gran dou égal à $\sum_{i=1}^n x_i^2$. $\square$

<u>Solution</u>.
Ceci serait une preuve tout à fait acceptable. Si vous aimez avoir plus de symboles, une des nombreuses façon de l'exprimer est

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\
&= x_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + x_2(x_1 + \ldots + x_n) + \ldots + x_n(x_1 + \ldots + x_n) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i x_1 + x_i x_2 + \ldots + x_i x_i + \ldots + x_i x_n) \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}$$

L'inégalité à la dernière ligne se justifie comme suit. Pour chaque i possible, tous les termes de $x_i x_1 + x_i x_2 + \ldots + x_i x_n$ sont positifs. On peut donc en retirer librement en maintenant une inégalité "$\geq$".

$\square$