MAT115 - Exercices sur les ensembles et les relations

Manuel Lafond

Exercices sur papier

Exercice 1: Soit S un ensemble de cardinalité n. Répondez aux questions suivantes en fonction de n, en justifiant vos réponses.

- Que vaut $|\{T \mid T \subseteq S \wedge |T| = 1\}|$?
- Que vaut $|\{(x, y) \mid x \in S \wedge y \in S\}|$?
- Que vaut $|\{(x, y) \mid x \in S \wedge y \in S \wedge x \neq y\}|$?
- Que vaut $|\{T \mid T \subseteq S \wedge |T| = 2\}|$?

Exercice 2: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Que vaut $|S \leftrightarrow S|$? (combien de relations de S à S)
- Combien existe-t-il de relations homogènes sur S?
- Que vaut $|S \rightarrow S|$? (combien de fonctions totales de S à S?)
- Que vaut $|S \mapsto\!\!\!\rightarrow S|$? (combien de fonctions partielles de S à S?)
- Que vaut $|S \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S|$? (combien de bijections totales de S à S?)

Exercice 3: Dans cette question, l'univers est $\mathbb{Z}$. Vous avez droit aux opérations arithmétiques $+, -, *, /$ dans vos formules, ainsi qu'aux opérations de comparaison $=, \neq, \leq, \geq, <, >$. vous devez définir chacun des ensembles, relations ou fonctions décrites ci-bas.
Notez qu'on dit qu'un entier est *positif* s'il est plus grand ou égal à 1. À chaque numéro, vous pouvez utiliser les définitions construites aux numéros précédents. Je recommande de combiner ces ensembles avec $\cup, \cap, \setminus$ lorsque c'est possible.

a. Définissez $\mathbb{Z}^{<0}$, l'ensemble des entiers négatifs.

b. Pour deux entiers $i, j \in \mathbb{Z}$, définissez $[i, j]$ comme l'ensemble de entiers entre i et j, incluant i et j.

   En utilisant la définition de $[i, j]$, définissez ensuite (i, j) comme l'ensemble des entiers entre i et j, excluant i et j.

c. Pour un entier $i \in \mathbb{Z}$, définissez M_i comme l'ensemble des multiples de i.

d. Définissez P, l'ensemble des nombres pairs. (on considère que 0 est un nombre pair)

e. Définissez I, l'ensemble des nombres impairs. Essayez de ne pas utiliser la définition par extension ou compréhension (suggestion: les nombres impairs sont les nombres qui ne sont pas pairs).

f. Définissez I_3, l'ensemble des nombres impairs qui sont des multiples de 3. Essayez de ne pas utiliser la définition par extension ou compréhension.

g. Définissez $M^+_{2,3}$, l'ensemble des entiers positifs (plus grand ou égaux à 1) qui sont des multiples de 2 ou de 3. Essayez de ne pas utiliser la définition par extension ou compréhension.

h. Définissez la relation *divise*, qui contient tous les couples (x, y) tels que x est un diviseur de y. Vous pouvez utiliser la notation $\{(x, y)| \ldots\}$.

i. Définissez l'ensemble *premier*, qui contient les nombres premiers. On considère ici qu'un nombre premier doit être positif.

j. Définissez la relation *pgd* des plus grands diviseurs, qui contient tous les couples (x, y) tels que x et y sont positifs, et tels que x est le plus grand diviseur de y autre que y lui-même.

k. Définissez *ppcm*, qui contient tous les triplets (x, y, z) tels que x, y, z sont positifs, et z est le plus petit multiple commun de x et y.

Exercice 4: Chacun des numéros ci-bas décrit une relation f, qui est possiblement une fonction. Pour chacune d'entre elles, dites si c'est une fonction. Lorsque ce n'est pas le cas, dites si la relation est (1) réflexive; (2) symétrique; (3) transitive; (4) asymétrique; (5) antisymétrique. Lorsque la relation est une fonction, dites si elle est (7) totale; (8) injective; (9) surjective; (10) bijective. Les propriétés des fonctions sont par rapport aux ensembles S et T spécifiés dans chaque numéro, qui forment l'univers.
Notez que ceci veut dire que de façon implicite, nous supposons que $x \in S \cup T$ et $y \in S \cup T$ sans nécessairement le spécifier dans chaque définition.

a. $S = T = \mathbb{Z}$
   f est la relation *divise* de l'exercice 3.

b. $S = T = \mathbb{N}$
   f est la relation *pgd* de l'exercice 3.

c. $S = T = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$
   $f = \{(x, y) \mid y = x/2\}$

d. $S = T = \mathbb{N}$
   $f = \{(x, y) \mid y = x/2\}$

e. $S = T = \mathbb{Z}$
   $f = \{(x, y) \mid y = x * x\ \}$

f. $S = T = \mathbb{N}$
   $f = id(S) = \{(x, x) : x \in S\}$

g. $S = T = \mathbb{Z}$
   $f = \{(x, y) \mid \exists k \cdot k \in \mathbb{Z} \wedge y = x + 5 * k\}$

h. $S = T = \mathbb{R}$
   $f = \{(x, y) \mid y = sin(x)\ \}$
   (où *sin* est la fonction trigonométrique usuelle)

i. Soit $P \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ l'ensemble des nombres pairs non-négatifs, et $I = \mathbb{N} \setminus P$ l'ensemble des nombres impairs non-négatifs.
   $S = \mathbb{N} \cup \{0\}, T = \mathbb{Z}$
   $f = \{(x, y) \mid (y \in \mathbb{Z} \wedge ((x \in P \wedge y = \frac{x}{2}) \vee (x \in I \wedge y = -1 * \frac{x+1}{2}))\}$

j. (question boni, optionnel)
   $S = T = \mathbb{Q}$
   $f = \{(x, y) \mid x = \frac{a}{b} \wedge y = \frac{c}{d} \wedge a * d = b * c\}$

Exercices avec ProB

Exercice 5: ProB est un logiciel pour la vérification formelle. À partir d'un univers, il peut construire vos ensembles définis par compréhension. (en fait ProB fait beaucoup plus, par exemple il peut vérifier des preuves ou même l'exécution d'un programme, mais pour l'instant, on s'intéresse aux ensembles)
Dans cet exercice, vous devez définir des relations familiales à l'aide d'ensembles et relations. Il suffit d'ouvrir dans ProB le fichier `exos-famille.mch` que vous trouverez sur la page du cours. L'univers est un ensemble de personnes (voir la section SETS du fichier).
Vous pouvez supposer que les personnes sont divisées en deux catégories Homme et Femme (voir la section PROPERTIES). Pour fins de simplification pédagogique, nous modélisons ici le modèle binaire de genre. On vous donne aussi une relation Parent, où (x, y) est dans Parent si x est un parent de y.
Les ensembles à définir sont dans le fichier .mch, voir les commentaires.