MAT115 - Exercices sur les ensembles et les relations

Manuel Lafond

Exercices sur papier

Exercice 1: Soit S un ensemble de cardinalité n. Répondez aux questions suivantes en fonction de n, en justifiant vos réponses.

- Que vaut $|\{T \mid T \subseteq S \wedge |T| = 1\}|$?

  Solution.
  C'est le nombre de sous-ensembles de taille 1 de S. Les seules façons de construire un tel sous-ensemble est de prendre un élément de S et de le mettre dans le sous-ensemble. Ceci en revient à demander combien d'éléments se trouvent dans S. La réponse est donc n. $\square$

- Que vaut $|\{(x, y) \mid x \in S \wedge y \in S\}|$?

  Solution.
  Pour construire une paire ordonnée (x, y) dans laquelle $x \in S, y \in S$, on doit d'abord choisir x, puis y. Il y a n choix pour x, et n choix pour y, et le nombre de combinaisons de choix est $n \cdot n = n^2$. $\square$

- Que vaut $|\{(x, y) \mid x \in S \wedge y \in S \wedge x \neq y\}|$?

  Solution.
  Tel que vu ci-haut, on doit d'abord choisir x parmi n choix. Pour chacun de ces choix, on doit ensuite choisir y parmi $n - 1$ choix restants (il y a un choix en moins car on ne peut pas reprendre x). Le nombre de combinaisons de choix est donc $n(n - 1)$. $\square$

- Que vaut $|\{T \mid T \subseteq S \wedge |T| = 2\}|$?

  Solution.
  Pour former un sous-ensemble de taille 2, disons $\{x, y\}$, on choisit d'abord x parmi n choix, puis y parmi les $n - 1$ choix restants. Le nombre de combinaisons est $n(n-1)$. Par contre, ce procédé va générer deux fois le même sous-ensemble pour chaque x, y, i.e. il génère $\{x, y\}$ et $\{y, x\}$, qui sont égaux. Puisque ce procédé génère $n(n - 1)$ sous-ensembles, mais

que chacun est compté deux fois, il faut diviser par 2 pour obtenir le nombre réel de sous-ensembles de taille 2, qui est donc $n(n-1)/2$.

Si vous ne le voyez pas, je vous recommande de l'essayer avec par exemple $S = \{1, 2, 3, 4\}$, vous verrez qu'il y a $4 \cdot 3/2 = 6$ sous-ensembles de taille 2. $\square$

Exercice 2: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Que vaut $|S \leftrightarrow S|$? (combien de relations de S à S)

  <u>Solution</u>.
  Ceci est le nombre de relations de S à S. Une relation R est un sous-ensemble de couples, i.e. $R \subseteq S \times S$. Donc, chaque sous-ensemble de $S \times S$ correspond à une relation et elles sont toutes distinctes. Le nombre de relations possibles est donc le nombre de sous-ensembles de $S \times S$, qui est $|\mathbb{P}(S \times S)| = 2^{|S \times S|}$. On se rapelle que $|S \times S| = n^2$, et donc $|S \leftrightarrow S| = 2^{n^2}$. $\square$

- Combien existe-t-il de relations homogènes sur S?

  <u>Solution</u>.
  Ceci est la même question que la précédente, donc même réponse. $\square$

- Que vaut $|S \to S|$? (combien de fonctions totales de S à S?)

  <u>Solution</u>.
  Considérons comment on peut construire une fonction totale $f \in S \to S$. Pour $(x, y) \in f$, on écrit $f(x) = y$. Il faut définir $f(x)$ pour chaque $x \in S$, et chaque $f(x)$ est un élément de S. Pour $f(1)$, on a n choix possibles. Pour $f(2)$, on a aussi n choix possibles, et ainsi de suite. Donc pour chaque $x \in S$, on a n choix pour $f(x)$ et chaque combinaison de choix donne lieu à une fonction différente. Le nombre de fonctions est donc $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$, multiplié $|S| = n$ fois. La réponse est donc n^n.

  $\square$

- Que vaut $|S \mapstochar\rightarrow S|$? (combien de fonctions partielles de S à S?)

  <u>Solution</u>.
  Le raisonnement est similaire à la question précédente. La différence principale est qu'on peut choisir que $f(x)$ n'est pas défini. Dans ce cas,

pour chaque $x \in S$, on a $n+1$ choix pour $f(x)$, car on peut choisir $f(x) \in S$ ou bien $f(x)$ non-défini. Le nombre de fonctions partielles est donc $(n+1)(n+1) \cdot (n+1)$ multiplié n fois. La réponse est donc $(n+1)^n$. $\square$

- Que vaut $|S \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S|$? (combien de bijections totales de S à S?)

  Solution.
  Construisons $f \in S \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S$, en définissant $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ dans l'ordre. On a n choix pour $f(1)$, puis une fait ce choix fait, il reste $n-1$ choix pour $f(2)$, puis ensuite il reste $n-2$ choix pour $f(3)$, et ainsi de suite. Le nombre de telles fonctions est donc $n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) = n!$.

  Ceci est le nombre de permutations. Quand on y réfléchit, ce n'est pas un hasard. $\square$

Exercice 3: Dans cette question, l'univers est $\mathbb{Z}$. Vous avez droit aux opérations arithmétiques $+, -, *, /$ dans vos formules, ainsi qu'aux opérations de comparaison $=, \neq, \leq, \geq, <, >$. vous devez définir chacun des ensembles, relations ou fonctions décrites ci-bas.
Notez qu'on dit qu'un entier est *positif* s'il est plus grand ou égal à 1. À chaque numéro, vous pouvez utiliser les définitions construites aux numéros précédents. Je recommande de combiner ces ensembles avec $\cup, \cap, \setminus$ lorsque c'est possible.

a. Définissez $\mathbb{Z}^{<0}$, l'ensemble des entiers négatifs.

   Solution.

$$\mathbb{Z}^{<0} = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \land n < 0\}$$

   Notez qu'on aurait pu omettre $n \in \mathbb{Z}$, puisque nous avons déjà défini l'univers comme étant $\mathbb{Z}$. $\square$

b. Pour deux entiers $i, j \in \mathbb{Z}$, définissez $[i, j]$ comme l'ensemble de entiers entre i et j, incluant i et j.

   En utilisant la définition de $[i, j]$, définissez ensuite (i, j) comme l'ensemble des entiers entre i et j, excluant i et j.

Solution.

$$[i, j] = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq i \wedge n \leq j\}$$
$$(i, j) = [i, j] \setminus \{i, j\}$$

$\square$

c. Pour un entier $i \in \mathbb{Z}$, définissez M_i comme l'ensemble des multiples de i.

Solution.

$$M_i = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge \exists m \cdot (m \in \mathbb{Z} \wedge n = i * m)\}$$

$\square$

d. Définissez P, l'ensemble des nombres pairs. (on considère que 0 est un nombre pair)

Solution.

$$P = M_2$$

Une alternative aurait aussi été:

$$P = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge \exists y \cdot (y \in \mathbb{Z} \wedge x = 2 * y)\}$$

$\square$

e. Définissez I, l'ensemble des nombres impairs. Essayez de ne pas utiliser la définition par extension ou compréhension (suggestion: les nombres impairs sont les nombres qui ne sont pas pairs).

Solution.

$$I = \mathbb{Z} \setminus P$$

$\square$

f. Définissez I_3, l'ensemble des nombres impairs qui sont des multiples de 3. Essayez de ne pas utiliser la définition par extension ou compréhension.

Solution.

$$I_3 = M_3 \cap I$$

$\square$

g. Définissez $M^+_{2,3}$, l'ensemble des entiers positifs (plus grand ou égaux à 1) qui sont des multiples de 2 ou de 3. Essayez de ne pas utiliser la définition par extension ou compréhension.

Solution.

Une façon de faire est de d'abord prendre les entiers positifs via $\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{Z}^{<0} \cup \{0\})$, puis de garder seulement ceux qui sont des multiples de 2 ou 3 via l'intersection. Pour éviter toute confusion, il est recommandé de mettre toutes les parenthèses nécessaires.

$$M^+_{2,3} = (\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{Z}^{<0} \cup \{0\})) \cap (M_2 \cup M_3)$$

$\square$

h. Définissez la relation *divise*, qui contient tous les couples (x, y) tels que x est un diviseur de y. Vous pouvez utiliser la notation $\{(x, y)| \ldots\}$.

Solution.

$$divise = \{(x, y) \mid \exists z \cdot (x * z = y)\}$$

Notez que je n'ai pas spécifié $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z}$ car c'est déjà implicite, puisque notre univers est $\mathbb{Z}$. $\square$

i. Définissez l'ensemble *premier*, qui contient les nombres premiers. On considère ici qu'un nombre premier doit être positif.

Solution.

$$premier = \{x \mid x > 0 \land \forall y \cdot (y > 0 \land y \neq 1 \land y \neq x \Rightarrow (y, x) \notin divise)\}$$

$\square$

j. Définissez la relation *pgd* des plus grands diviseurs, qui contient tous les couples (x, y) tels que x et y sont positifs, et tels que x est le plus grand diviseur de y autre que y lui-même.

Solution.

$$\begin{aligned} pgd = \{(x, y) \mid (x < y) \land (x > 0) \land ((x, y) \in divise) \land \\ \forall z \cdot ((z > x) \land (z < y) \Rightarrow (z, y) \notin divise)\} \end{aligned}$$

$\square$

k. Définissez *ppcm*, qui contient tous les triplets (x, y, z) tels que x, y, z sont positifs, et z est le plus petit multiple commun de x et y.

Solution.

$$\begin{aligned} ppcm = \{(x, y, z) \mid\ & (x > 0) \land (y > 0) \land (z > 0) \land \\ & \exists i, j \cdot ((z = i * x) \land (z = j * y)) \land \\ & \forall z' \cdot (\exists i, j \cdot ((z' = i * x) \land (z' = j * y) \Rightarrow z' \geq z)\} \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 4: Chacun des numéros ci-bas décrit une relation f, qui est possiblement une fonction. Pour chacune d'entre elles, dites si c'est une fonction. Lorsque ce n'est pas le cas, dites si la relation est (1) réflexive; (2) symétrique; (3) transitive; (4) asymétrique; (5) antisymétrique. Lorsque la relation est une fonction, dites si elle est (7) totale; (8) injective; (9) surjective; (10) bijective. Les propriétés des fonctions sont par rapport aux ensembles S et T spécifiés dans chaque numéro, qui forment l'univers.
Notez que ceci veut dire que de façon implicite, nous supposons que $x \in S \cup T$ et $y \in S \cup T$ sans nécessairement le spécifier dans chaque définition.

a. $S = T = \mathbb{Z}$
f est la relation *divise* de l'exercice 3.

Solution.
Dans cette solution, je suppose que l'on considère que x est un diviseur de lui-même.

Ce n'est pas une fonction car un x peut être un diviseur de plusieurs entiers. Par exemple, $(4, 12) \in divise$ et $(4, 16) \in divise$.

Réflexive: oui car x est un diviseur de lui-même.

Symétrique: non, par exemple $(4, 12) \in divise$ mais $(12, 4) \notin divise$.

Transtive: oui. Si x est un diviseur de y et y est un diviseur de z, alors x est un diviseur de z. Pour le voir, on note que si c'est le cas, il existe p, q tels que $y = p * x$ et $z = q * y$. Ceci veut dire que $z = q * p * x$ et donc x divise z.

Asymétrique: non car *divise* est réflexive. Par exemple, $(4, 4) \in divise$ et donc ce n'est pas symétrique.

Antisymétrique: oui. Si x divise y et y divise x, il faut que $x = y$.

$\square$

b. $S = T = \mathbb{N}$
f est la relation *pgd* de l'exercice 3.

Solution.
Ce n'est pas une fonction, car x peut être le plus grand diviseur de plusieurs y. Par exemple, $(11, 22) \in pgd$ et $(11, 33) \in pgd$.

Réflexive: non, car la définition stipule que si $(x, y) \in pgd$, x est un diviseur de y autre que y lui-même.

Symétrique: non, par exemple $(11, 22) \in pgd$ mais $(22, 11) \notin pgd$.

Transtive: non. Par exemple, $(1, 11) \in pgd$ et $(11, 22) \in pgd$, mais $(1, 22) \notin pgd$.

Asymétrique: oui. Si $(x, y) \in pgd$, alors nécessairement $x < y$. Ceci implique que $(y, x) \notin pgd$.

Antisymétrique: oui. Si une relation est asymétrique, est elle aussi antisymétrique. Ceci est parce que le cas $(x, y) \in pgd \wedge (y, x) \in pgd$ ne se présente jamais, et donc l'implication dans la définition est toujours vraie.

$\square$

c. $S = T = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$
$f = \{(x, y) \mid y = x/2\}$

Solution.
C'est une fonction car pour chaque x, il y a au plus un seul y possible dans S tel que $y = x/2$.

Totale: non car si x est impair, alors x n'est en relation avec aucun y (car les y sont restreints aux entiers).

Injective: oui, car pour chaque y, il ne peut y avoir au plus qu'un seul x tel que $y = x/2$.

Surjective: non car la fonction est définie sur $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Par exemple pour $y = 100$, il n'y a aucun $x \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ tel que $y = x/2$.

Bijective: non car ce n'est pas surjectif.

$\square$

d. $S = T = \mathbb{N}$
$f = \{(x, y) \mid y = x/2\}$

Solution.

C'est une fonction car pour chaque x, il y a au plus un seul y possible dans S tel que $y = x/2$.

Totale: non car si x est impair, alors x n'est en relation avec aucun y (car les y sont restreints aux entiers).

Injective: oui, car pour chaque y, il ne peut y avoir au plus qu'un seul x tel que $y = x/2$.

Surjective: oui. Pour chaque $y \in \mathbb{N}$, on peut considérer $x = 2 * y \in \mathbb{N}$, et on voit que $(x, y) \in f$. Donc, chaque y possible est du "côté droit" d'un couple de f.

Bijective: oui car f est injective et surjective. C'est un exemple de bijection partielle.

$\square$

e. $S = T = \mathbb{Z}$
$f = \{(x, y) \mid y = x * x\}$

Solution.
C'est une fonction, car pour tout x, $x * x$ est une valeur unique.

Totale: oui car pour tout x, $x * x$ est bien défini et dans $\mathbb{Z}$.

Injective: non. Par exemple, on a $(2, 4) \in f$ et $(-2, 4) \in f$. Donc on peut avoir deux x distincts qui "pointent" au même y et ce n'est pas injectif.

Surjective: non. Par exemple, pour $y = 3$, il n'y a aucun x entier tel que $x * x = y$.

Bijective: non. $\square$

f. $S = T = \mathbb{N}$
$f = id(S) = \{(x, x) : x \in S\}$

Solution.
C'est une fonction, car tout x est dans une relation avec un seul élément (lui-même).

Totale: oui.

Injective: oui. Chaque x étant distinct, chaque x est en relation avec un élément différent.

Surjective: oui. Chaque x est le “coté droit” du couple $(x, x) \in id(S)$.

Bijective: oui. $\square$

g. $S = T = \mathbb{Z}$
$f = \{(x, y) \mid \exists k \cdot k \in \mathbb{Z} \wedge y = x + 5 * k\}$

Solution.
Ce n’est pas une fonction. Par exemple, $(10, 20) \in f$ et $(10, 25) \in f$.

Réflexive: oui. $(x, x) \in f$ car si on prend $k = 0$, on a $x = x + 5 * 0$.

Symétrique: oui, car k peut être négatif. Donc si $(x, y) \in f$, il y a un k tel que $y = x + 5 * k$. Mais alors, $x = y + 5 * (-k)$, et donc $(y, x) \in f$.

Transitive: oui. Soit $(x, y) \in f, (y, z) \in f$. Donc il existe k_1, k_2 tels que $y = x + 5 * k_1$ et $z = y + 5 * k_2 = x + 5 * k_1 + 5 * k_2$. Ceci veut dire que $z = x + 5 * (k_1 + k_2)$ et donc $(x, z) \in f$.

Asymétrique: non, car c’est symétrique.

Antisymétrique: non car on peut avoir $x \neq y$ mais $(x, y) \in f$ et $(y, x) \in f$.

$\square$

h. $S = T = \mathbb{R}$
$f = \{(x, y) \mid y = sin(x) \}$
(où sin est la fonction trigonométrique usuelle)

Solution.
C’est une fonction, car $sin(x)$ ne prend qu’une seule valeur pour tout x.

Totale: oui, car $sin(x)$ est bien défini sur tous les réels.

Injective: non, à cause du comportement oscillatoire de sin. Par exemple, $sin(0) = sin(2\pi) = 0$.

Surjective: non. Par exemple, avec $y = 1000$, il n’y a aucun x tel que $sin(x) = 1000$.

Bijective: non. $\square$

i. Soit $P \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ l'ensemble des nombres pairs non-négatifs, et $I = \mathbb{N} \setminus P$ l'ensemble des nombres impairs non-négatifs.
$S = \mathbb{N} \cup \{0\}, T = \mathbb{Z}$
$f = \{(x, y) \mid (y \in \mathbb{Z} \wedge ((x \in P \wedge y = \frac{x}{2}) \vee (x \in I \wedge y = -1 * \frac{x+1}{2}))\}$

Solution.
C'est une fonction. Si x est pair, il y exactement un y tel que $y = x/2$, et si x est impair, il y a exactement un y tel que $y = -1 * (x + 1)/2$.

Totale: oui, avec la même justification que le paragraphe précédent.

Injective: oui. Pour le voir, considérons deux $x_1 \in S, x_2 \in S$ distincts. Il existe y_1, y_2 uniques tels que $(x_1, y_1) \in f$ et $(x_2, y_2) \in f$. Si x_1 est pair et x_2 est impair, alors $y_1 \geq 0$ et $y_2 < 0$ (car $x_2 > 0$), donc $y_1 \neq y_2$. Si x_1, x_2 ont la même parité, il est facile de vérifier que $y_1 \neq y_2$.

Surjective: oui. Si $y < 0$, alors avec $x = -2 * y - 1$, on a $x \in \mathbb{N}$ et donc $(x, y) \in f$. So $y \geq 0$, alors avec $x = 2 * x$, on a $x \in \mathbb{N}$ et donc $(x, y) \in f$. Donc, chaque $y \in \mathbb{Z}$ est du "côté droit" d'un couple de f.

Bijective: oui. Il y a donc une bijection totale de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$, ce qui est bizarre car on dirait qu'il y a "deux fois plus" d'entiers dans $\mathbb{Z}$ que dans $\mathbb{N}$. C'est une des joies de l'infini. □

j. (question boni, optionnel)
$S = T = \mathbb{Q}$
$f = \{(x, y) \mid x = \frac{a}{b} \wedge y = \frac{c}{d} \wedge a * d = b * c\}$

Solution.
Puisque c'est un boni, je ne le fais pas! C'est une relation d'équivalence. Si vous voulez discuter de la solution, venez me voir. □

Exercices avec ProB

Exercice 5: ProB est un logiciel pour la vérification formelle. À partir d'un univers, il peut construire vos ensembles définis par compréhension. (en fait ProB fait beaucoup plus, par exemple il peut vérifier des preuves ou même l'exécution d'un programme, mais pour l'instant, on s'intéresse aux ensembles) Dans cet exercice, vous devez définir des relations familiales à l'aide d'ensembles et relations. Il suffit d'ouvrir dans ProB le fichier `exos-famille.mch` que vous

trouverez sur la page du cours. L'univers est un ensemble de personnes (voir la section SETS du fichier).
Vous pouvez supposer que les personnes sont divisées en deux catégories Homme et Femme (voir la section PROPERTIES). Pour fins de simplification pédagogique, nous modélisons ici le modèle binaire de genre. On vous donne aussi une relation Parent, où (x, y) est dans Parent si x est un parent de y.
Les ensembles à définir sont dans le fichier .mch, voir les commentaires.