

MAT115 - Exercices sur les arbres de preuve

Manuel Lafond

Exercices avec Panda

Exercice 1: Pour les exercices suivants, vous devez utiliser le logiciel Panda pour produire un arbre de preuve. Je vous donne les exercices en format texte, que vous pouvez copier-coller dans Panda.

- a. $((p \text{ and } q) \text{ imply } (p \text{ and } ((\text{not } p) \text{ or } q)))$
- b. $((p \text{ and } (p \text{ or } q)) \text{ imply } (p \text{ or } (p \text{ and } q)))$
- c. $((p \text{ or } (p \text{ and } q)) \text{ imply } (p \text{ and } (p \text{ or } q)))$
- d. $((p \text{ imply } q) \text{ and } (q \text{ imply } r)) \text{ imply } (p \text{ imply } r)$

Solution.

Je les ai tous fait dans la même fenêtre panda, voici le résultat:

$$\frac{\frac{\frac{\cancel{(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})}_{(E\wedge)}^{(1)}}{\mathbf{p}} \quad \frac{\frac{\cancel{(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})}_{(E\wedge)}^{(1)}}{\mathbf{q}}}{(\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q})_{(I\wedge)}}}{(\mathbf{p} \wedge (\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q}))}^{(I\rightarrow)(1)}}{((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{p} \wedge (\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q})))}$$

$$\frac{\frac{\frac{\cancel{(\mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}))}_{(E\wedge)}^{(2)}}{\mathbf{p}}}{(\mathbf{p} \vee (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}))}^{(I\rightarrow)(2)}}{((\mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{q})) \rightarrow (\mathbf{p} \vee (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})))}$$

$$\frac{\frac{\frac{\cancel{(\mathbf{p} \vee (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}))}_{(E\vee)}^{(3)} \quad \frac{\frac{\mathbf{p}^{(4)}}{(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})}_{(I\vee)}}{(\mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}))}^{(I\wedge)} \quad \frac{\frac{\cancel{(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})}_{(E\wedge)}^{(5)} \quad \frac{\frac{\cancel{(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})}_{(E\wedge)}^{(5)}}{\mathbf{p}}}{(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})_{(I\wedge)}}}{(\mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}))}^{(E\vee)(4)(5)}}{(\mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}))}^{(I\rightarrow)(3)}}{((\mathbf{p} \vee (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})) \rightarrow (\mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{q})))}$$

$$\frac{\frac{\frac{\cancel{((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}))}_{(E\wedge)}^{(6)}}{(\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})} \quad \frac{\frac{\cancel{((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}))}_{(E\wedge)}^{(6)}}{(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})} \quad \frac{\mathbf{p}^{(7)}}{\mathbf{p}}_{(E\rightarrow)}}{\mathbf{r}}^{(E\rightarrow)}}{(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r})}^{(I\rightarrow)(7)}}{(((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})) \rightarrow (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}))}^{(I\rightarrow)(6)}}$$

□

Exercice 2: Quelques questions plus difficiles avec les arbres de preuves.

- a. $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (\neg p)$
 $((p \text{ imply } (\text{not } p)) \text{ imply } (\text{not } p))$

- b. $\neg(\neg p \vee q) \Rightarrow p \wedge \neg q$
 ((not ((not p) or q)) imply (p and (not q)))
- c. $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q) \Rightarrow q$
 (((not p) imply q) and ((not p) or q)) imply q)
- d. $\neg p \vee q \Rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
 (((not p) or q) imply (not(p and (not q))))
- e. $\neg(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$
 ((not ((not p) or q)) imply (p and (not q)))
- f. $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$
 (((p imply q) and (not q)) imply (not p))

Solution.

Pour le moment, les solutions aux numéros e) et f)

$$\frac{\frac{\frac{\neg p^{(2)}}{\neg p \vee q} (I\vee) \quad \neg(\neg p \vee q)^{(1)}}{\perp} (I\perp) \quad \frac{\frac{q^{(3)}}{\neg p \vee q} (I\vee) \quad \neg(\neg p \vee q)^{(1)}}{\perp} (I\perp) \quad (I\rightarrow)(3)}{\neg p} (E\rightarrow) \quad \frac{\frac{\frac{q^{(3)}}{\neg p \vee q} (I\vee) \quad \neg(\neg p \vee q)^{(1)}}{\perp} (I\perp) \quad (I\rightarrow)(3)}{\neg q} (I\wedge)}{p \wedge \neg q} (I\wedge)}{\neg(\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg q)} (I\rightarrow)(1)$$

$$\frac{\frac{\frac{((p \rightarrow q) \wedge \neg q)^{(4)} (E\wedge) \quad p^{(5)}}{(p \rightarrow q)} (E\rightarrow) \quad \frac{((p \rightarrow q) \wedge \neg q)^{(4)} (E\wedge)}{\neg q} (I\perp)}{\perp} (I\perp) \quad (I\rightarrow)(5)}{\neg p} (I\rightarrow)(4)}{((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p} (I\rightarrow)(4)$$

□