MAT115 - Exercices sur la logique du premier ordre

Manuel Lafond

Exercices théoriques

Exercice 1: Démontrez les énoncés suivants. Vous pouvez utiliser les tables de vérité.

a. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

b. $(p \Rightarrow Vrai) \Leftrightarrow Vrai$

c. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$ (contraposition)

d. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (loi de De Morgan)

e. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (loi de De Morgan)

f. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributivité OU sur ET)

g. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivité ET sur OU)

Solution.
Je ne donnerai pas les solutions. Je vous invite à les vérifier vous-mêmes, par exemple via `https://web.stanford.edu/class/cs103/tools/truth-table-tool/`. Pour chaque équivalence, il suffit d'entrer la partie gauche de l'équivalence, la partie droite, puis de vérifier que les tables sont identiques.

$\square$

Exercice 2: Démontrez les énoncés suivants. Vous ne **pouvez pas** utiliser les tables de vérité. Utilisez plutôt des chaînes d'implications et des équivalences. Vous devriez utiliser les tables de faits présentées dans les notes de cours.

a. $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$

Solution.
Rappelons que pour démontrer une équivalence du type $A \Leftrightarrow B$, on peut démarrer de A, en déduire une expression équivalente, puis une autre,

et ce jusqu'à ce qu'on ait atteint B. Chaque étape intermédiaire est justifiée par une entrée des tables de logique.

$$\begin{aligned}
& p \vee (\neg p \wedge q) & \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) & \text{(LP-13, distrib. du } \vee\text{)} \\
\Leftrightarrow\ & Vrai \wedge (p \vee q) & \text{(LP-20)} \\
\Leftrightarrow\ & p \vee q & \text{(LP-3)}
\end{aligned}$$

□

b. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \wedge r))$

Solution.
Notons que $A \Leftrightarrow B$ est équivalent à $B \Leftrightarrow A$ (LP-43). On peut donc démarrer de B et prouver A. L'exercice est extrêmement facile si on démarre de $p \vee (q \wedge r)$.

$$\begin{aligned}
& p \vee (q \wedge r) & \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee q) \wedge (p \vee r) & \text{(LP-12, distrib du } \vee\text{)}
\end{aligned}$$

□

c. $\neg(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$

Solution.
Rappelons qu'on peut démontrer une implication via une chaîne d'implications. Notons aussi que notre chaîne peut inclure des équivalences, car l'équivalence inclut l'implication.

Puisque le $\Rightarrow$ est moins restrictif que le $\Leftrightarrow$, il est plus "facile" de maintenir une implication qu'une équivalence. Ceci est parce que l'on peut parfois enlever ou ajouter des affirmations qui n'affectent pas l'implication. Par exemple, on peut utiliser des faits tels que $A \wedge B \Rightarrow A$, car si A et B sont vrais, il clair que ceci implique que A est vrai. De la même façon, on peut utiliser $A \Rightarrow A \vee B$, car si A est vrai, alors $A \vee B$ devient vrai. Ces deux lois ont probablement été jugées trop triviales pour faire partie des lois, mais il est bien de vous en convaincre.

En combinant ces faits, on peut démontrer l'exercice comme suit:

$$
\begin{aligned}
& \neg(p \Rightarrow q \vee r) & \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg p \vee (q \vee r)) & \text{(LP-22)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg p) \wedge \neg(q \vee r) & \text{(LP-18)} \\
\Leftrightarrow\ & p \wedge \neg(q \vee r) & \text{(LP-21)} \\
\Leftrightarrow\ & p \wedge (\neg q \wedge \neg r) & \text{(LP-19)} \\
\Rightarrow\ & (\neg q \wedge \neg r) & (A \wedge B \Rightarrow B) \\
\Rightarrow\ & \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) & (A \Rightarrow A \vee B)
\end{aligned}
$$

□

d. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$

Solution.
En fait les deux côtés de l'implication sont équivalents:

$$
\begin{aligned}
& p \Rightarrow (q \Rightarrow r) & \\
\Leftrightarrow\ & p \Rightarrow (\neg q \vee r) & \text{(LP-22)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \vee (\neg q \vee r) & \text{(LP-22)} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee \neg q) \vee r & \text{(LP-10)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(p \wedge q) \vee r & \text{(LP-18)} \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q) \Rightarrow r & \text{(LP-22)}
\end{aligned}
$$

□

e. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

Solution.

Pour trouver la solution facile, il suffisait d'inspecter la table des lois. On trouve:

$$
\begin{aligned}
& (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) & \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) & \text{(LP-39)}
\end{aligned}
$$

et c'est tout! Si on veut le démontrer sans cette entrée la table, c'est assez difficile. Voici une soution détaillée (notez l'ajout du *vrai* avec la règle LP-3, il fallait y penser!). Selon moi, la seule façon de trouver une telle preuve est beaucoup d'essai-erreur.

$$
\begin{aligned}
& (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) & \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \wedge (\neg(\neg p) \vee r) & (\text{LP-22} \times 2) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) & (\text{LP-21}) \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg p \vee q) \wedge p) \vee ((\neg p \vee q) \wedge r) & (\text{LP-11}) \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \vee ((\neg p \vee q) \wedge r) & (\text{LP-11}) \\
\Leftrightarrow\ & (faux \vee (q \wedge p)) \vee ((\neg p \vee q) \wedge r) & (\text{LP-19}) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge p) \vee ((\neg p \vee q) \wedge r) & (\text{LP-4}) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) & (\text{LP-11}) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r \wedge vrai) & (\text{LP-3}) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r \wedge (p \vee \neg p)) & (\text{LP-20}) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge \neg p) & (\text{LP-11}) \\
\Leftrightarrow\ & ((q \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge p)) \vee ((\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r \wedge \neg p)) & (\text{LP-10}) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge p) \vee ((\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r \wedge \neg p)) & (\text{LP-14}) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge p) \vee (\neg p \wedge r) & (\text{LP-14})
\end{aligned}
$$

□

Pour plus d'exercices, consultez la section des exercices, chapitre 1 des notes de cours. Essayez de les résoudre via des chaînes d'implication.

Exercices avec Tarski-UdeS

Exercice 3: Les phrases suivantes sont exprimées avec les candidats définis par Tarski-UdeS. Elles correspondent toutes à des intuitions relativement simples. Dites ce que chacune de ces phrases veut dire en langage naturel, dans vos mots.

a. $\forall x \cdot (\neg(Small(x) \wedge Triangle(x)))$

Solution.
Il n'y a pas de petit triangle. □

b. $\forall x \cdot (\neg Small(x) \vee \neg Triangle(x))$

Solution.
Il n'y a pas de petit triangle. □

c. $\neg(\exists x \cdot (Small(x) \wedge Triangle(x)))$

Solution.
Il n'y a pas de petit triangle. □

d. $\forall x, y \cdot (SameRow(x, y) \wedge LeftOf(x, y) \Rightarrow \neg Smaller(y, x))$

Solution.
Les formes sur une même rangée sont triées en ordre de grandeur de gauche à droite. □

e. $\forall x \cdot (Pentagon(x) \Rightarrow \exists y \cdot (Smaller(y, x)) \wedge \exists y \cdot (Smaller(x, y)))$

Solution.
Tous les pentagones sont de taille medium. Ou de façon équivalente, pour tout pentagone, on peut trouver une forme plus petite et une plus grande. □

f. $\exists p \forall p' \cdot (\neg(p = p') \Rightarrow LeftOf(p, p'))$

Solution.
Il existe un un objet qui est à la gauche de tous les autres. □

g. $\forall p \exists p' \cdot (\neg(p = p') \Rightarrow LeftOf(p, p'))$

Solution.
Pour tout objet, on peut trouver un objet qui lui est égal ou bien qui est à sa droite. Notez que cette formule est toujours vraie (et mal composée en fait), car on peut poser $p = p'$. $\square$

h. $\forall x \exists y \forall z \cdot (Pentagon(x) \Rightarrow (LeftOf(y, x) \land Square(y) \land (LeftOf(z, x) \land Triangle(z) \Rightarrow LeftOf(z, y))))$

Solution.
Pour tous les pentagones, il y a un carré à sa gauche qui le sépare de tous les triangles à sa gauche.

Pour tout pentagone x, il y a un carré y à gauche de x, et tout triangle z à la gauche de x est aussi à la gauche de y. $\square$

Exercice 4: Traduisez les phrases suivantes en logique du premier ordre, à l'aide des prédicats Tarski-UdeS.

a. Aucun carré n'est petit.

Solution.
$\forall x \cdot (Square(x) \Rightarrow \neg Small(x))$ $\square$

b. Il y a au moins un carré.

Solution.
$\exists x \cdot Square(x)$ $\square$

c. Il y a au moins trois carrés (distincts).

Solution.
$\exists x, y, z \cdot Square(x) \land Square(y) \land Square(z) \land$
$(x \neq y) \land (x \neq z) \land (y \neq z)$ $\square$

d. Il y a au plus un carré.

Solution.
$\forall x, y \cdot (Square(x) \land (x \neq y) \Rightarrow \neg Square(y))$ $\square$

e. Chaque carré est à la gauche d'un pentagone plus grand que lui.

Solution.
$\forall x \cdot (Square(x) \Rightarrow \exists y \cdot (Pentagon(y) \land LeftOf(x, y))$ $\square$

f. Une forme qui est plus grande qu'une autre doit avoir plus de côtés.

Solution.

$$
\begin{aligned}
\forall x, y \cdot (Smaller(x, y) \Rightarrow \\
& Triangle(x) \wedge Square(y) \vee \\
& Triangle(x) \wedge Pentagon(y) \vee \\
& Square(x) \wedge Pentagon(y))
\end{aligned}
$$

$\square$

g. Une condition nécessaire pour que tous les carrés soient petits est l'existence d'un pentagone.

Solution.
$(\forall x \cdot (Square(x) \Rightarrow Small(x))) \Rightarrow (\exists x \cdot Pentagon(x))$ $\square$

h. Une condition nécessaire et suffisante pour que tous les carrés soient petits est l'existence d'un pentagone.

$(\forall x \cdot (Square(x) \Rightarrow Small(x))) \Leftrightarrow (\exists x \cdot Pentagon(x))$