MAT115 - Exercices sur la logique du premier ordre

Manuel Lafond

Exercices théoriques

Exercice 1: Démontrez les énoncés suivants. Vous pouvez utiliser les tables de vérité.

a. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

b. $(p \Rightarrow Vrai) \Leftrightarrow Vrai$

c. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$ (contraposition)

d. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (loi de De Morgan)

e. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (loi de De Morgan)

f. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributivité OU sur ET)

g. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivité ET sur OU)

Exercice 2: Démontrez les énoncés suivants. Vous ne **pouvez pas** utiliser les tables de vérité. Utilisez plutôt des chaînes d'implications et des équivalences. Vous devriez utiliser les tables de faits présentées dans les notes de cours.

a. $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$

b. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \wedge r))$

c. $\neg(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$

d. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$

e. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

Pour plus d'exercices, consultez la section des exercices, chapitre 1 des notes de cours. Essayez de les résoudre via des chaînes d'implication.

Exercices avec Tarski-UdeS

Exercice 3: Les phrases suivantes sont exprimées avec les candidats définis par Tarski-UdeS. Elles correspondent toutes à des intuitions relativement simples. Dites ce que chacune de ces phrases veut dire en langage naturel, dans vos mots.

a. $\forall x \cdot (\neg(Small(x) \wedge Triangle(x)))$

b. $\forall x \cdot (\neg Small(x) \vee \neg Triangle(x))$

c. $\neg(\exists x \cdot (Small(x) \wedge Triangle(x)))$

d. $\forall x, y \cdot (SameRow(x, y) \wedge LeftOf(x, y) \Rightarrow \neg Smaller(y, x))$

e. $\forall x \cdot (Pentagon(x) \Rightarrow \exists y \cdot (Smaller(y, x)) \wedge \exists y \cdot (Smaller(x, y)))$

f. $\exists p \forall p' \cdot (\neg(p = p') \Rightarrow LeftOf(p, p'))$

g. $\forall p \exists p' \cdot (\neg(p = p') \Rightarrow LeftOf(p, p'))$

h. $\forall x \exists y \forall z \cdot (Pentagon(x) \Rightarrow (LeftOf(y, x) \wedge Square(y) \wedge$
$(LeftOf(z, x) \wedge Triangle(z) \Rightarrow LeftOf(z, y))))$

Exercice 4: Traduisez les phrases suivantes en logique du premier ordre, à l'aide des prédicats Tarski-UdeS.

a. Aucun carré n'est petit.

b. Il y a au moins un carré.

c. Il y a au moins trois carrés (distincts).

d. Il y a au plus un carré.

e. Chaque carré est à la gauche d'un pentagone plus grand que lui.

f. Une forme qui est plus grande qu'une autre doit avoir plus de côtés.

g. Une condition nécessaire pour que tous les carrés soient petits est l'existence d'un pentagone.

h. Une condition nécessaire et suffisante pour que tous les carrés soient petits est l'existence d'un pentagone.