MAT115 - Exercices sur les automates à états finis

Manuel Lafond

Exercice 1: Pour chacun des ensembles de mots suivant, donnez un automate fini (déterministe ou non) qui accepte les mots de cet ensemble. À vous de décider d'un alphabet pertinent.

a. Les chaînes de caractères qui représentent des entiers, possiblement négatifs. Le caractère "-" pour le moins peut donc apparaître.

b. Les chaînes de caractères qui représentent des nombres réels, avec le point comme séparateur de décimales.

c. Les cip. Un cip est une chaîne contenant quatre lettres suivies de quatre chiffres.

d. Les entiers positifs, avec une vigule avant chaque groupe de trois chiffres (quand on lit de droite à gauche). Par exemple, $1,000,000$ ou encore $22,542,367,754,576$. S'il y a trois chiffres ou moins, il ne devrait pas y avoir de virgule.

e. Les chaînes de caractères contenant la sous-chaîne "mat". Essayez de faire un automate non-déterministe avec 4 états.

f. Les chaînes de caractères contenant au moins trois occurrences de la sous-chaîne "mat".

g. Les chaînes de caractères contenant la sous-chaîne "maman".

   Faites un AFND et un AFD.

h. Les chaînes de caractères contenant au moins une occurrence de "ma" et au moins une occurrence de "mo".

Exercice 2: Déterminisez des automates. Faites les exercices des notes de cours de Marc Frappier, Chapitre 4 section exercices, numéro 9.

Exercice 3: Minimisez des automates. Faites les exercices des notes de cours de Marc Frappier, Chapitre 4 section exercices, numéro 10.

Exercice 4: Soit Σ un alphabet et $M \subseteq \Sigma^*$ un ensemble de mots. On dit que M est *régulier* s'il existe un automate fini A tel que $L(A) = M$.

a. Montrez que si M est régulier, alors $\Sigma^* \setminus M$ est régulier.

b. Soit M_1, M_2 deux ensembles de mots réguliers, ainsi que l'ensemble

$$M_1 \frown M_2 = \{w \mid w = u \frown v \wedge u \in M_1 \wedge v \in M_2\}$$

où $\frown$ est le symbole de concaténation. Donc $u \frown v$ est le mot obtenu en ajoutant v à la fin de u. Par exemple, si $u = allo$ et $v = bonjour$, alors $u \frown v = allobonjour$.

Montrez que $M_1 \frown M_2$ est régulier.

c. Montrez que si M_1 et M_2 sont réguliers, alors $M_1 \cap M_2$ est régulier.

d. Soit $w \in \Sigma^*$. On écrit $rev(w)$ pour dénoter l'inverse de w, c'est-à-dire le mot w lu de droite à gauche. Par exemple, si $w = allo$, alors $rev(w) = olla$. Pour $M \subseteq \Sigma^*$, on définit

$$rev(M) = \{w \mid w \in \Sigma^* \wedge rev(w) \in M\}$$

Montrez que si M est régulier, alors $rev(M)$ est régulier.

e. (défi) Soit M un langage. On définit

$$suffixes(M) = \{w \mid w \in \Sigma^* \wedge \exists u \cdot (u \in \Sigma^* \wedge concat(u, w) \in M)\}$$

Dit autrement, $suffixes(M)$ contient tous les mots de M, ainsi que tous les suffixes des mots de M.

Montrez que si M est un langage régulier, alors $suffixes(M)$ est un langage régulier.

Idée: considérez un automate A pour M minimisé. Donc chaque état de A est accessible par un mot u, et donc chaque peut être vu comme u "producteur de suffixes".

Exercice 5: Démontrez que la procédure vue en classe pour déterminiser un automate fini non-déterministe ne donne pas nécessairement un automate minimal.

Exercice 6: (défi) Soit M l'ensemble des mots de la forme $a^n b^n$ pour un entier n. Dit autrement, M est contient les mots constitués d'une série de a, suivie d'une série de b, tels qu'il y a autant de a que de b. Par exemple, *aaabbb* ou *ab* sont dans M, mais pas *aaaabbb* ni *aababb*.
Démontrez qu'il n'existe pas d'automate fini dont le langage est M.