MAT115 - Devoir #4

À remettre le **jeudi 4 avril avant 23h59**.
Tout retard entraînera jusqu'à 33% de pénalité par jour.

Pondération. Ce travail compte pour 7.5% des points de la session.
Modalités. Considérez les points suivants.

- Le travail peut être fait seul ou en équipe de deux.
- Le travail est sur un total de 106 points. Si vous note dépasse 100, votre note finale sera 100.
- Le devoir doit être remis **en format pdf** via turnin. La provenance de votre pdf n'a pas d'importance — ce pdf peut provenir d'un export d'un fichier Word ou d'un fichier texte, d'un scan de vos écrits/dessins, etc.

  Il n'y a pas de norme de présentation particulière. Écrivez lisiblement, et **assurez-vous que vos noms et CIP apparaissent** clairement sur le devoir remis.
- Vous pouvez utiliser les techniques de preuves que vous désirez, les indices ne sont que des suggestions.
- Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser les résultats démontrés en classe et dans les solutionnaires d'exercices sans avoir à les démontrer (par exemple, par exemple, vous pouvez utiliser les tables des lois de la logique). Par contre, si vous utilisez de nouveaux résultats, vous devez les démontrer.

Question 1 : quelques questions d'échauffement ($7 + 4 + 7 + 6 + 8 = 32$ **points)**

Répondez aux questions suivantes. Elles devraient être résolubles sans utiliser l'induction.

a. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrez que n est impair si et seulement si $5n + 6$ est impair.

b. Montrez que l'énoncé "pour tout entier $n > 1$, $n^2 + 1$ est un nombre premier" est faux.

c. Si p et $p + 2$ sont des nombres premiers, on dit que p et $p + 2$ sont des *nombres premier jumeaux*.

   Montrez que si $p > 3$ est un entier et que p et $p+2$ sont des nombres premiers jumeaux, alors $p \,\%\, 3 = 2$.

   Note. Rappelons que dans ce cours, nous avons défini % comme l'opérateur modulo, qui est le reste de la division entière. En d'autres termes, $p \,\%\, 3 = x$ veut dire que $x \in \{0, 1, 2\}$ et qu'il existe un entier k tel que $p = 3k + x$. Donc, $p \,\%\, 3$ n'a que trois valeurs possibles. Je recommande de montrer que $x = 0$ et $x = 1$ ne sont pas possibles car ils impliquent que p ou $p + 2$ est un multiple de 3, et donc que l'un d'entre eux n'est pas premier.

d. Bien que des jumeaux existents, il ne peut pas exister de nombres premiers triplets (à part $3, 5, 7$).

   Montrez qu'il n'existe pas d'entier $p > 3$ tel que $p, p+2$ et $p+4$ sont tous les trois des nombres premiers. Vous pouvez utiliser le résultat de la question précédente.

e. Soit $n > 0$ un entier. Montrez que $n^4 \leq \sum_{i=1}^{n} i^4 \leq n^5$.

   Suggestion. Il y a deux inégalités que je prouverais séparément. Dans les deux cas, j'ai fait une preuve directe en listant au long tous les termes de la sommation.

   Boni 5 points. Montrez que pour tout entier $a \geq 1$ et entier $n \geq 2$ pair, il est vrai que $\left(\frac{n}{2}\right)^{a+1} \leq \sum_{i=1}^{n} i^a \leq n^{a+1}$. Cette question est plus difficile. Si vous répondez au boni, vous n'avez pas à répondre à la question e).

Question 2 : comprenez-vous l'induction? ($8 + 8 + 10 + 10 = 36$ **points**)

Répondez aux questions suivantes. Cette fois-ci, je recommande l'induction. Si vous l'utilisez, vous devez clairement indiquer votre hypothèse d'induction et indiquer l'endroit où elle est utilisée.

a. Soit $n \geq 0$ un entier. Montrez que $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

b. Soit la fonction mathématique définie sur $\mathbb{N}$ comme suit:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 4 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot f(n-1) + 8 \cdot f(n-2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Montrez que $f(n) = 4^n$ pour tout entier $n \geq 0$.

c. Montrez que tout entier $n \geq 1$ peut être écrit comme une somme de puissances de deux. Ce fait est assez utile, car il permet d'exprimer n'importe quel nombre en binaire.

Plus précisément, vous devez montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un ensemble d'entiers $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tel que $n = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \ldots + 2^{i_k}$ (notez que cet ensemble d'indices est différent pour chaque n).

Par exemple, pour $n = 10$, on a $10 = 2^3 + 2^1$, ou encore pour $n = 16$, on a $16 = 2^4$. Je recommande l'induction forte avec deux cas à gérer: soit n est un nombre pair, ou pas.

d. Montrez que pour tout entier $n \geq 2$, il est vrai que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$.

Note. Il pourrait être utile de savoir que si $n \geq 2$, alors $\frac{-1}{n-1} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{-1}{n}$. Vous aurez la majorité de vos points si vous utilisez ce fait sans le démontrer. Vous aurez tous vos points pour une preuve complète, incluant une preuve de ce fait intermédiaire si vous l'utilisez.

Question 3 : petit retour sur les ensembles, relations et formules ($11 + 11 + 11 = 33$ **points)**

a. Montrez que

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \land \exists a \cdot \exists b \cdot (a \in \mathbb{Z} \land b \in \mathbb{Z} \land x = 2a + 3b)\} = \mathbb{Z}$$

Rappel. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble de tous les entiers.

b. Soit R une relation homogène sur un ensemble S quelconque. Montrez que $R; R \subseteq R$ si et seulement si R est transitive.

Rappel. Si R_1 et R_2 sont deux relations, $R_1; R_2$ dénote la composition des relations, où $R_1; R_2 = \{(x, y) \mid \exists z \cdot ((x, z) \in R_1 \land (z, y) \in R_2)\}$.

c. Dans cette question, nous traitons de formules en logique propositionnelle. Soit $A, B_1, B_2, \ldots, B_m$ des formules, avec $m \geq 2$. Montrez que

$$A \lor (B_1 \land B_2 \land \ldots \land B_m) \Leftrightarrow (A \lor B_1) \land (A \lor B_2) \land \ldots \land (A \lor B_m)$$

Suggestion. Je recommande l'induction sur m, en définissant $B^* = B_1 \land \ldots \land B_{m-1}$. Vous pouvez utiliser les lois LP si vous en avez besoin.