MAT115 - Devoir #4

À remettre le **jeudi 4 avril avant 23h59**.
Tout retard entraînera jusqu'à 33% de pénalité par jour.

Pondération. Ce travail compte pour 7.5% des points de la session.
Modalités. Considérez les points suivants.

- Le travail peut être fait seul ou en équipe de deux.
- Le travail est sur un total de 106 points. Si vous note dépasse 100, votre note finale sera 100.
- Le devoir doit être remis **en format pdf** via turnin. La provenance de votre pdf n'a pas d'importance — ce pdf peut provenir d'un export d'un fichier Word ou d'un fichier texte, d'un scan de vos écrits/dessins, etc.

  Il n'y a pas de norme de présentation particulière. Écrivez lisiblement, et **assurez-vous que vos noms et CIP apparaissent** clairement sur le devoir remis.
- Vous pouvez utiliser les techniques de preuves que vous désirez, les indices ne sont que des suggestions.
- Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser les résultats démontrés en classe et dans les solutionnaires d'exercices sans avoir à les démontrer (par exemple, par exemple, vous pouvez utiliser les tables des lois de la logique). Par contre, si vous utilisez de nouveaux résultats, vous devez les démontrer.

Question 1 : quelques questions d'échauffement ($7 + 4 + 7 + 6 + 8 = 32$ **points**)

Répondez aux questions suivantes. Elles devraient être résolubles sans utiliser l'induction.

a. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrez que n est impair si et seulement si $5n + 6$ est impair.

   Solution.
   On prouve les deux directions séparément.

   ($\Rightarrow$) Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ pour un certain entier k. On a $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 10k + 5 + 6 = 10k + 11 = 10(k + 1) + 1$. Ceci est un nombre impair.

   ($\Leftarrow$) On prouve l'énoncé par contraposition. Donc, on montre que si n est pair, alors $5n+6$ est pair. Si n est pair, alors $n = 2k$ pour un certain k, et $5n+6 = 5 \cdot 2k+6 = 10k+6 = 2(5k+3)$, qui est un nombre pair. $\square$

b. Montrez que l'énoncé "pour tout entier $n > 1$, $n^2 + 1$ est un nombre premier" est faux.

   Solution.
   Il suffit de donner un seul contre-exemple montrant que l'énoncé est faux. On prend $n = 3$. On a $n > 1$ mais $n^2 + 1 = 9 + 1 = 10$, qui n'est pas premier. Donc l'énoncé est faux. $\square$

c. Si p et $p + 2$ sont des nombres premiers, on dit que p et $p + 2$ sont des *nombres premier jumeaux.*

   Montrez que si $p > 3$ est un entier et que p et $p+2$ sont des nombres premiers jumeaux, alors $p \% 3 = 2$.

   Note. Rappelons que dans ce cours, nous avons défini % comme l'opérateur modulo, qui est le reste de la division entière. En d'autres termes, $p \% 3 = x$ veut dire que $x \in \{0, 1, 2\}$ et qu'il existe un entier k tel que $p = 3k + x$. Donc, $p \% 3$ n'a que trois valeurs possibles. Je recommande de montrer que $x = 0$ et $x = 1$ ne sont pas possibles car ils impliquent que p ou $p + 2$ est un multiple de 3, et donc que l'un d'entre eux n'est pas premier.

   Solution.
   Tel que mentionné dans l'énoncé, $p \% 3 \in \{0, 1, 2\}$. Si $p \% 3 = 0$, alors $p = 3k + 0 = 3k$ pour un certain entier k. Alors p est un multiple de 3 et, puisque $p > 3$, il n'est pas premier. Si $p \% 3 = 1$, alors $p = 3k + 1$ pour un certain k. Alors $p + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$. Donc $p+2$ est un multiple de 3 et, puisque $p+2 > 3$, il n'est pas premier. La seule possibilité restante est donc que $p \% 3 = 2$. $\square$

d. Bien que des jumeaux existents, il ne peut pas exister de nombres premiers triplets (à part $3, 5, 7$).

   Montrez qu'il n'existe pas d'entier $p > 3$ tel que $p, p+2$ et $p+4$ sont tous les trois des nombres premiers. Vous pouvez utiliser le résultat de la question précédente.

   Solution.
   Supposons pour fins de contradiction que $p > 3$ et $p, p + 2, p + 4$ sont premiers. Puisque p et $p + 2$ sont premiers, par le résultat précédent, on a $p = 3k + 2$ pour un certain entier k. On a ensuite $p + 4 = 3k + 2 + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2)$. Donc $p + 4$ est un multiple de 3 et n'est pas premier parce que $p + 4 > 3$, une contradiction. $\square$

e. Soit $n > 0$ un entier. Montrez que $n^4 \leq \sum_{i=1}^{n} i^4 \leq n^5$.

Suggestion. Il y a deux inégalités que je prouverais séparément. Dans les deux cas, j'ai fait une preuve directe en listant au long tous les termes de la sommation.

Solution.
On a
$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 \geq n^4$$
car la partie $1^4 + \ldots + n^4$ n'a que des termes positifs et contient n^4. Ceci justifie que $n^4 \leq \sum_{i=1}^{n} i^4$.

De l'autre côté, on a $\sum_{i=1}^{n} i^4 \leq \sum_{i=1}^{n} n^4$, car chaque terme de la somme est plus petit ou égal à n^4. De plus, $\sum_{i=1}^{n} n^4 = n^4 + n^4 + \ldots + n^4 = n \cdot n^4 = n^5$, ce qui justifie l'inégalité restante.

Dit autrement, on a
$$\sum_{i=1}^{n} i^4 \leq \sum_{i=1}^{n} n^4 = n \cdot n^4 = n^5$$

$\square$

Boni 5 points. Montrez que pour tout entier $a \geq 1$ et entier $n \geq 2$ pair, il est vrai que $\left(\frac{n}{2}\right)^{a+1} \leq \sum_{i=1}^{n} i^a \leq n^{a+1}$. Cette question est plus difficile. Si vous répondez au boni, vous n'avez pas à répondre à la question e).

Solution.
La borne $\leq n^{a+1}$ se démontre de la même façon que le numéro précédent. Concentrons-nous sur l'autre borne. On veut montrer que $\sum_{i=1}^{n} i^a \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{a+1}$, avec n pair. On a
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^a &= n^a + (n-1)^a + \ldots + \left(\frac{n}{2}+1\right)^a + \left(\frac{n}{2}\right)^a + \ldots + 2^a + 1^a \\
&\geq n^a + (n-1)^a + \ldots + \left(\frac{n}{2}+1\right)^a + \left(\frac{n}{2}\right)^a \\
&\geq \left(\frac{n}{2}\right)^a + \left(\frac{n}{2}\right)^a + \ldots + \left(\frac{n}{2}\right)^a \qquad (n/2 \text{ termes})
\end{aligned}$$

Pour justifier la dernière étape, on voit que chaque terme de la ligne précédente est plus grand ou égal à $(n/2)^a$. De plus, il y a au moins $n/2$ tels termes. Pour compléter la preuve, on remarque que la dernière ligne est donc égale à
$$\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^a = \left(\frac{n}{2}\right)^{a+1}$$
ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Question 2 : comprenez-vous l'induction? ($8 + 8 + 10 + 10 = 36$ **points)**

Répondez aux questions suivantes. Cette fois-ci, je recommande l'induction. Si vous l'utilisez, vous devez clairement indiquer votre hypothèse d'induction et indiquer l'endroit où elle est utilisée.

a. Soit $n \geq 0$ un entier. Montrez que $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

Solution.
On procède par induction sur n.

Cas de base. $n = 0$. On a $\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$. De l'autre côté, $2 - \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{1} = 1$.

Induction. On suppose que $n > 1$ et que $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

on veut montrer que $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^n} \\
&= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} && \text{par hypothèse d'induction} \\
&= 2 - \frac{2}{2 \cdot 2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\
&= 2 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\
&= 2 - \frac{2-1}{2^n} \\
&= 2 - \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

$\square$

b. Soit la fonction mathématique définie sur $\mathbb{N}$ comme suit:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 4 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot f(n-1) + 8 \cdot f(n-2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Montrez que $f(n) = 4^n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Solution.
Par induction sur n.

Cas de base. Il faut deux cas de base. Pour $n = 0$, $f(0) = 1$ et $4^0 = 1$. Pour $n = 1$, $f(1) = 4$ et $4^1 = 4$.

Induction. On suppose que $n \geq 2$ et que $f(m) = 4^m$ pour tout m entre 0 et $n - 1$.

On a

$$f(n) = 2f(n-1) + 8f(n-2) = 2 \cdot 4^{n-1} + 8 \cdot 4^{n-2}$$

par l'hypothèse d'induction. Ceci est égal à

$$2 \cdot 4^{n-1} + 2 \cdot 4 \cdot 4^{n-2} = 2 \cdot 4^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1} = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

c. Montrez que tout entier $n \geq 1$ peut être écrit comme une somme de puissances de deux. Ce fait est assez utile, car il permet d'exprimer n'importe quel nombre en binaire.

   Plus précisément, vous devez montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un ensemble d'entiers $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tel que $n = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \ldots + 2^{i_k}$ (notez que cet ensemble d'indices est différent pour chaque n).

   Par exemple, pour $n = 10$, on a $10 = 2^3 + 2^1$, ou encore pour $n = 16$, on a $16 = 2^4$. Je recommande l'induction forte avec deux cas à gérer: soit n est un nombre pair, ou pas.

   Solution.
   On prouve l'énoncé par induction forte sur n.

   Cas de base: $n = 1$ peut être écrit comme 2^0 et l'énoncé est vrai.

   Induction: on suppose que l'énoncé est vrai pour tout m entre 1 et $n - 1$, donc que $m = 2^{i_1} + \ldots + 2^{i_k}$ pour un ensemble d'indices. On suppose que $n \geq 2$ et on veut prouver que n peut être exprimé comme une somme de puissances de 2.

   Si n est impair, alors $n = 2h + 1$ pour $k \in \mathbb{N}$. On a $1 \leq 2h < n$ et on peut donc appliquer l'hypothèse sur $2h$, qui est égal à $2h = 2^{i_1} + \ldots + 2^{i_k}$. Notons que puisque $2k$ est pair, 2^0 n'apparaît pas dans cette sommation. On a

$$\begin{aligned} n = 2h + 1 &= 2^{i_1} + 2^{i_2} + \ldots + 2^{i_k} + 1 \\ &= 2^{i_1} + 2^{i_2} + \ldots + 2^{i_k} + 2^0 \end{aligned}$$

   et donc n est une somme de puissances de 2, avec l'ensemble d'indices pour n qui est $\{i_1, i_2, \ldots, i_k, 0\}$. Notons que ceci est bel et bien un ensemble (donc sans répétition) car 0 ne faisait pas partie des i_k (si vous n'aviez pas pensé à cet aspect de non-répétition, ce n'est pas dramatique).

   Supposons alors que n est pair. Alors $n = 2h$ pour $h \in \mathbb{N}$. Puisque $n \geq 2$, on a $h \geq 1$ et, par hypothèse, $h = 2^{i_1} + \ldots + 2^{i_k}$. On a

$$\begin{aligned} n = 2h &= 2 \cdot (2^{i_1} + 2^{i_2} + \ldots + 2^{i_k}) \\ &= 2^{i_1+1} + 2^{i_2+1} + \ldots + 2^{i_k+1} \end{aligned}$$

   et l'énoncé est vrai, avec n ayant comme indices $\{i_1 + 1, \ldots, i_k + 1\}$. Notons que puisque $\{i_1, \ldots, i_k\}$ était un ensemble sans répétition, le nouvel ensemble pour n est aussi sans répétition. $\square$

d. Montrez que pour tout entier $n \geq 2$, il est vrai que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$.

   Note. Il pourrait être utile de savoir que si $n \geq 2$, alors $\frac{-1}{n-1} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{-1}{n}$. Vous aurez la majorité de vos points si vous utilisez ce fait sans le démontrer. Vous aurez tous vos points pour une preuve complète, incluant une preuve de ce fait intermédiaire si vous l'utilisez.

   Solution.
   On prouve l'énoncé par induction en supposant que $\frac{-1}{n-1} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{-1}{n}$. On prouvera ce dernier fait plus tard.

   Cas de base. $n = 2$. On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. De l'autre côté, on a $2 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{8}{4} - \frac{2}{4} = \frac{6}{4}$. Ceci prouve le cas de base car $\frac{5}{4} < \frac{6}{4}$.

Induction. On suppose que $n > 2$ et que l'énoncé est vrai pour $n-1$, et donc que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n-1}$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} \\
&< 2 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} && \text{par H.I.} \\
&\leq 2 - \frac{1}{n} && \text{par le fait intermédiaire}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il reste maintenant à prouver que $\frac{-1}{n-1} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{-1}{n}$. Plusieurs façons sont possibles, ici on procède par contradiction et on suppose que $\frac{-1}{n-1} + \frac{1}{n^2} > \frac{-1}{n}$. Ceci mène à

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{n-1} + \frac{1}{n^2} &> \frac{-1}{n} \\
\frac{-n}{n-1} + \frac{n}{n^2} &> -1 && \times n \text{ chaque côté} \\
-n + \frac{n(n-1)}{n^2} &> -(n-1) && \times (n-1) \text{ chaque côté} \\
-n^3 + n(n-1) &> -n^2(n-1) && \times n^2 \text{ chaque côté} \\
-n^2 + n - 1 &> -n(n-1) && /n \text{ chaque côté} \\
-n^2 + n - 1 &> -n^2 + n && \text{expansion de } -n(n-1) \\
n - 1 &> n && +n^2 \text{ de chaque côté} \\
-1 &> 0 && -n \text{ de chaque côté}
\end{aligned}$$

une contradiction. $\square$

Question 3 : petit retour sur les ensembles, relations et formules ($11 + 11 + 11 = 33$ **points)**

a. Montrez que

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \land \exists a \cdot \exists b \cdot (a \in \mathbb{Z} \land b \in \mathbb{Z} \land x = 2a + 3b)\} = \mathbb{Z}$$

Rappel. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble de tous les entiers.

Solution.
On va appeler l'ensemble de la partie gauche A. On montre que $A \subseteq \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subseteq A$.

Soit $x \in A$. Une des conditions pour que $x \in A$ est $x \in \mathbb{Z}$. Donc $x \in \mathbb{Z}$, impliquant que $A \subseteq \mathbb{Z}$.

De l'autre côté, soit $x \in \mathbb{Z}$. Si x est un multiple de 2, disons $x = 2k$. On peut poser $a = k, b = 0$, et on voit que $x = 2a + 3b$. Donc x satisfait les conditions pour être dans A, et $x \in A$.

Sinon, $x = 2k + 1$ pour un certain entier k. On a $x = 2(k - 2) - 4 + 1 = 2(k - 2) - 3$. On pose $a = k - 2$ et $b = -1$, et on voit que $x = 2a + 3b$. On déduit encore que $x \in A$.

Ces deux cas montrent que $\mathbb{Z} \subseteq A$.

$\square$

b. Soit R une relation homogène sur un ensemble S quelconque. Montrez que $R; R \subseteq R$ si et seulement si R est transitive.

Rappel. Si R_1 et R_2 sont deux relations, $R_1; R_2$ dénote la composition des relations, où $R_1; R_2 = \{(x, y) \mid \exists z \cdot ((x, z) \in R_1 \land (z, y) \in R_2)\}$.

Solution.
($\Rightarrow$) Supposons que $R; R \subseteq R$ et montrons que R est transitive. Prenons $x, y, z \in S$ tels que $(x, y) \in R, (y, z) \in R$. On doit montrer que $(x, z) \in R$. On a que $(x, z) \in R; R$, car y existe et satisfait $(x, y) \in R, (y, z) \in R$. De plus, puisuqe $R; R \subseteq R$ et $(x, z) \in R; R$, on a $(x, z) \in R$. Donc R est transitive.

($\Leftarrow$) Supposons que R est transitive et montrons que $R; R \subseteq R$. Soit $(x, y) \in R; R$. On doit montrer que $(x, y) \in R$. Puisque $(x, y) \in R; R$, il existe $z \in S$ tel que $(x, z) \in R, (z, y) \in R$. Puisque R est transitive, on a $(x, y) \in R$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

c. Dans cette question, nous traitons de formules en logique propositionnelle. Soit $A, B_1, B_2, \ldots, B_m$ des formules, avec $m \geq 2$. Montrez que

$$A \lor (B_1 \land B_2 \land \ldots \land B_m) \Leftrightarrow (A \lor B_1) \land (A \lor B_2) \land \ldots \land (A \lor B_m)$$

Suggestion. Je recommande l'induction sur m, en définissant $B^* = B_1 \land \ldots \land B_{m-1}$. Vous pouvez utiliser les lois LP si vous en avez besoin.

Solution.
On procède par induction sur m.

Cas de base. $m = 2$. On veut montrer que $A \lor (B_1 \land B_2) = (A \lor B_1) \land (A \lor B_2)$. Ceci est la loi de distributivité des lois LP, et donc le cas de base est prouvé.

Induction. On suppose que l'énoncé est vrai pour $m-1$ et on veut montrer qu'il est vrai pour m. On définit la formule $B^* = B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_{m-1}$. On a donc que $A \vee (B_1 \wedge \ldots \wedge B_{m-1} \wedge B_m)$ est équivalent à

$$
\begin{aligned}
& A \vee (B^* \wedge B_m) & \\
\Leftrightarrow\ & (A \vee B^*) \wedge (A \vee B_m) & \text{par distributivité} \\
\Leftrightarrow\ & (A \vee (B_1 \wedge \ldots \wedge B_{m-1})) \wedge (A \vee B_m) & \text{def de } B^* \\
\Leftrightarrow\ & ((A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2) \wedge \ldots \wedge (A \vee B_{m-1})) \wedge (A \vee B_m) & \text{par H.I.} \\
\Leftrightarrow\ & (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2) \wedge \ldots \wedge (A \vee B_{m-1}) \wedge (A \vee B_m) &
\end{aligned}
$$

□