MAT115 - Devoir #3

À remettre le **vendredi 23 février avant 12h30 (midi trente)**.
Tout retard entraînera jusqu'à 33% de pénalité par jour.

Pondération. Ce travail compte pour 5.5% des points de la session.
Modalités. Considérez les points suivants.

- Le travail peut être fait seul ou en équipe de deux.
- Le devoir doit être remis en format pdf via turnin. La provenance de votre pdf n'a pas d'importance — ce pdf peut provenir d'un export d'un fichier Word ou d'un fichier texte, d'un scan de vos écrits/dessins, etc.

  Il n'y a pas de norme de présentation particulière. Écrivez lisiblement, et assurez-vous que vos noms et CIP apparaissent clairement sur le devoir remis.
- Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser les résultats démontrés en classe et dans les solutionnaires d'exercices sans avoir à les démontrer (par exemple, par exemple, vous pouvez utiliser les tables des lois de la logique). Par contre, si vous utilisez de nouveaux résultats, vous devez les démontrer.

Question 1 : modélisation d'une carte avec ensembles et relations (10×5.5 points)

Dans cette question, nous allons modéliser le plan d'une ville à l'aide des ensembles, fonctions et relations. Un *lieu* est un endroit d'intérêt. Nous modélisons trois types de lieux: les commerces, les résidences et les intersections. Vous pouvez supposer que trois ensembles correspondants ont été définis et vous sont donnés: Commerce, Residence, Intersection.
L'ensemble Lieu de tous les lieux est donc

$$Lieu = Commerce \cup Residence \cup Intersection$$

On suppose qu'un lieu fait partie d'un seul de ces trois ensembles (et pas deux ni trois). Ceci s'exprime par:

$$(Commerce \cap Residence = \emptyset) \wedge (Commerce \cap Intersection = \emptyset) \wedge (Residence \cap Intersection = \emptyset)$$

Une rue sert à lier deux lieux. Chaque rue a une direction. Pour deux lieux x et y, on représente le fait qu'une rue mène de x à y avec le couple (x, y). Notez que ceci n'est pas équivalent à (y, x). La relation Rue contient tous les couples (x, y) qui forment des rues. On peut supposer qu'il n'y a jamais de rue qui va d'un lieu au même lieu.
Vous devez spécifier les ensembles et relations qui sont donnés ci-bas. Vous pouvez remettre vos réponses sur papier avec le formalisme vu en classe, ou vous pouvez remettre en langage ProB (un fichier .mch contenant un exemple est disponible).

a. Edifice, qui contient les commerces et les résidences. N'utilisez pas une définition par compréhension.

Solution.

$$Edifice = Commerce \cup Residence$$

□

b. Puit, qui contient les lieux x desquels on ne peut pas sortir, c'est-à-dire, qu'aucune rue ne permet d'aller de x vers un autre lieu.

Solution.

$$Puit = \{x \mid x \in Lieu \wedge \neg(\exists y \cdot ((x, y) \in Rue))\}$$

La syntaxe $\{x \in Lieu \mid \ldots\}$ est aussi acceptable (i.e. mettre l'appartenance à Lieu avant le "|").

Notez aussi que $\neg(\exists y \cdot A)$ est équivalent à $\forall y \cdot \neg A$. Vous auriez aussi pu écrire quelque chose du style:

$$Puit = \{x \mid x \in Lieu \wedge \forall y \cdot ((x, y) \notin Rue)\}$$

□

c. Source, qui contient les lieux x où on ne peut pas entrer, c'est-à-dire, qu'aucune rue ne permet d'aller d'un autre lieu vers x.

Solution.

$$Source = \{x \mid x \in Lieu \wedge \neg \exists y \cdot (y \in Lieu \wedge (y, x) \in Rue)\}$$

$\square$

d. Interne, qui contient les lieux qui ne sont pas des puits, ni des sources. N'utilisez pas une définition par comprehension ni par extension.

Solution.

$$Interne = Lieu \setminus (Puit \cup Source)$$

$\square$

e. Adjacence, qui contient toutes les paires non-ordonnées $\{x, y\}$ de lieux x et y telles que au moins un de (x, y) ou (y, x) est une rue.

Notez que vous pouvez définir un ensemble de paires non-ordonnées par $\{\{x, y\} \mid \ldots\}$. Par contre, dans ProB, il faut une syntaxe du style $\{T | T \subseteq Lieu \wedge |T| = 2 \ldots\}$. Pour la suite du devoir, si $\{x, y\} \in Adjacence$, on dira que x est adjacent à y et que y est adjacent à x.

Solution.

$$Adjacence = \{\{x, y\} \mid (x, y) \in Rue \vee (y, x) \in Rue\}$$

Notons qu'il faudrait techniquement vérifier que $x \neq y$, mais ce n'est pas requis car on suppose que $(x, x) \notin Rue$.

Autres formes que $\{x, y\}$ acceptable, par exemple

$$\begin{aligned} Adjacence = \{T \mid T \subseteq Lieu \wedge |T| = 2 \wedge \\ \forall x, y \cdot (x \in T \wedge y \in T \Rightarrow (x, y) \in Rue \vee (y, x) \in Rue)\} \end{aligned}$$

$\square$

f. Isole, qui contient les résidences et les commerces qui n'ont aucune adjacence.

Solution.
Plusieurs réponses possibles. En voici une:

$$Isole = \{x \mid x \in Edifice \wedge \neg \exists y \cdot (\{x, y\} \in Adjacence)\}$$

ou encore

$$Isole = Edifice \cap Puit \cap Source$$

$\square$

g. SemiIsole, qui contient les résidences qui sont seulement adjacentes à des intersections.

Solution.

$$SemiIsole = \{x \mid x \in Residence \land \forall y \cdot (\{x, y\} \in Adjacence \Rightarrow y \in Intersection)\}$$

□

h. Chemin, qui contient l'ensemble des couples (x, y) tels qu'il existe un chemin de x à y. Notez qu'un chemin est une séquence de rues $(x, z_1), (z_1, z_2), \ldots, (z_k, y)$ dont le départ est x et la fin est y. La longueur du chemin est arbitraire.

On dira que x est capable d'atteindre y s'il existe un chemin de x à y.

Solution.
La question ne spécifiait pas clairement s'il existait un chemin de x à x, alors j'acceptais

$$Chemin = Rue^*$$

ou bien

$$Chemin = Rue^+$$

Si vous n'avez pas utilisé de fermeture transitive, ça ne fonctionne probablement pas. □

i. SansClient, qui contient tous les commerces qu'aucune résidence n'est capable d'atteindre.

Solution.

$$SansClient = \{x \mid x \in Commerce \land \neg\exists y \cdot (y \in Residence \land (y, x) \in Chemin)\}$$

□

j. Monopole, qui contient tous les commerces x tels que toute résidence capable d'atteindre x n'est pas capable d'atteindre un commerce autre que x.

Solution.

$$\begin{aligned} Monopole = \{x \mid x \in Commerce \land & \\ & \forall y, z \cdot (y \in Residence \land (y, x) \in Chemin \land \\ & z \in Commerce \land (y, z) \in Chemin \Rightarrow z = x\} \end{aligned}$$

□

Question 2 : composantes fortement connexes (1×17 **points**)

Cette question donne suite à la question 1. On définit la relation CheminBidir, qui inclut les paires de lieux x et y telles que l'on peut aller de x à y, et de y à x. On considère que tout lieu x devrait être en relation avec lui-même. Formellement, la définition est:

$$\begin{aligned} \mathit{CheminBidir} = \{(x,y) \mid x \in \mathit{Lieu} \wedge y \in \mathit{Lieu} \wedge \\ (x = y \vee ((x,y) \in \mathit{Chemin} \wedge (y,x) \in \mathit{Chemin}))\} \end{aligned}$$

Argumentez que CheminBidir est une relation d'équivalence.

Solution.
On doit montrer que CheminBidir est réflexive, symétrique et transitive.

CheminBidir est réflexive: soit $x \in \mathit{Lieu}$. On voit que $(x,x) \in \mathit{CheminBiDir}$, car le couple (x,x) satisfait les conditions $x \in \mathit{Lieu}, y \in \mathit{Lieu}, x = y$ dans la construction.

CheminBiDir est symétrique: soit $(x,y) \in \mathit{CheminBidir}$ avec $x \neq y$. Il faut argumenter que $(y,x) \in \mathit{CheminBidir}$. Par la définition de CheminBidir, il doit être vrai que $(x,y) \in \mathit{Chemin}$ et $(y,x) \in \mathit{Chemin}$. Si on se demande si $(y,x) \in \mathit{Chemin}$, on voit que le couple (y,x) satisfait la condition que $(y,x) \in \mathit{Chemin}$ et $(x,y) \in \mathit{Chemin}$, et donc le couple (y,x) fera aussi partie de CheminBidir. La relation est donc symétrique.

CheminBidir est transitive: soit x, y, z tels que $(x,y) \in \mathit{CheminBidir}$ et $(y,z) \in \mathit{CheminBidir}$. On doit argumenter que $(x,z) \in \mathit{CheminBidir}$. Il existe un chemin de x à z, car on peut concaténer le chemin de x à y avec celui de y à z, pour aller de x à z. Donc $(x,z) \in \mathit{Chemin}$.
De plus $(x,y) \in \mathit{CheminBidir}$ implique qu'il existe un chemin de y à x et $(y,z) \in \mathit{CheminBidir}$ implique qu'il existe un chemin de z à y. On peut concaténer le chemin de z à y suivi du chemin de y à x pour aller de z à x. Donc $(z,x) \in \mathit{Chemin}$. Bref, on peut aller de x à z, et aussi de z à x, et donc $(x,z) \in \mathit{CheminBidir}$, tel que désiré.

$\square$

Question 3 : questions en vrac (4×7 **points**)

Dans les questions qui suivent, S est un ensemble quelconque, T est un ensemble quelconque et $R \subseteq S \times S$ est une relation homogène sur S. On suppose que S, T et R sont finis (donc, pas infinis). Pour chacun des énoncés qui suivent, vous devez dire s'il est toujours vrai, ou bien s'il peut être faux dans certains cas (dépendamment du contenu de S, T et R). Vos réponses doivent être justifiées.

a. Si R est asymétrique, alors R est antisymétique.

   Solution.
   Vrai. Puisqu'avec l'asymétrie, $(x,y) \in R$ implique $(y,x) \notin R$, le cas $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$ ne se présente jamais, alors l'implication requise dans la définition d'antisymétrique est toujours vraie. $\square$

b. Si R est antisymétrique, alors R est asymétrique.

   Solution.
   Faux. Une relation antisymétrique permet $(x,x) \in R$, ce qui n'est pas permis dans une relation asymétrique. $\square$

c. $|S \cup T| = |S| + |T|$.

Solution.
Faux. Si S et T ont un élément en commun ou plus, l'union aura moins que $|S|+|T|$ éléments, et donc ce n'est pas toujours égal. Par exemple si $S = \{1, 2\}$ et $T = \{2, 3, 4\}$, on a $|S|+|T| = 5$ mais $|S \cup T| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4$. □

d. $|S \cap T| \leq \max(|S|, |T|)$.

Solution.
Vrai. L'intersection est un sous-ensemble de S et donc ne peut pas contenir plus d'éléments que S. De la même façon, l'intersection ne peut pas contenir plus d'éléments que T. Donc, $|S \cap T| \leq |S|$ et $|S \cap T| \leq |T|$, ce qui implique que $|S \cap T|$ n'est pas plus grand que le maximum des deux cardinalités (en fait, on aurait pu remplacer max par min et ça resterait vrai). □