MAT115 - Devoir #2

À remettre le **lundi 12 février avant 23h59**.
Tout retard entraînera jusqu'à 33% de pénalité par jour.

Pondération. Ce travail compte pour 5% des points de la session.
Modalités. Considérez les points suivants.

- Le travail peut être fait seul ou en équipe de deux.
- Le devoir doit être remis en format pdf via turnin. La provenance de votre pdf n'a pas d'importance — ce pdf peut provenir d'un export d'un fichier Word ou d'un fichier texte, d'un scan de vos écrits/dessins, etc.

  Il n'y a pas de norme de présentation particulière. Écrivez lisiblement, et assurez-vous que vos noms et CIP apparaissent clairement sur le devoir remis.
- Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser les résultats démontrés en classe et dans les solutionnaires d'exercices sans avoir à les démontrer (par exemple, par exemple, vous pouvez utiliser les tables des lois de la logique). Par contre, si vous utilisez de nouveaux résultats, vous devez les démontrer.

Question 1 : modèles, satisfaisabilité et autres (8×4 points)

a. Dites si la formule suivante est satisfaisable. Vous devez justifier votre réponse

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4)$$

b. Déterminez si l'ensemble de formule suivant est cohérent. Vous devez justifier votre réponse.

$$\begin{aligned}&\neg(p \vee q)\\ &\neg p \Rightarrow r\\ &q \vee \neg r\end{aligned}$$

c. Soient A et B deux ensembles de formules. On dit que B est une *conséquence logique* de A si tout modèle de A est aussi un modèle de B.

La notation pour indiquer que B est une conséquence logique de A est

$$A \models B$$

Dans vos mots, décrivez une façon de vérifier que $A \models B$ (l'efficacité de votre approche n'a pas d'importance, vous devez seulement décrire une méthode qui fonctionne).

d. Soit A défini selon les trois formules

$$\begin{aligned}A = \ & p \vee q,\\ & \neg q \Rightarrow r,\\ & \neg r \vee \neg p\end{aligned}$$

et B défini selon les deux formules

$$\begin{aligned}B = \ & \neg(p \wedge q \wedge \neg r),\\ & (p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)\end{aligned}$$

Est-ce que $A \models B$? Justifiez votre réponse.

Question 2 : interprétation de formules (6×5.5 points)

Nous modélisons les chaînes de caractères en logique du premier ordre. Une chaîne de caractères est une suite de symboles numériques (0-9) ou alphabétiques, en minuscule (a-z). La *longueur* d'une chaîne est le nombre de symboles. Par exemple, `bonjour` est une chaîne de longueur 7. Une chaîne est *numérique* si tous ses symboles sont des chiffres, et elle est *alphabétique* si tous ses symbols sont des lettres. Par exemple, `2023` est numérique, `salut` est alphabétique, et `mat115` n'est aucun des deux.
On définit les prédicats suivants:

- pour une chaîne x, $alpha(x)$ est *vrai* si et seulement si x est alphabétique;
- pour une chaîne x, $num(x)$ est *vrai* si et seulement si x est numérique;
- pour deux chaînes x, y, $plusCourt(x, y)$ est *vrai* si et seulement si la longueur de x est plus petite que la longueur de y;
- pour deux chaînes x, y, $diff(x, y)$ est *vrai* si et seulement si x, y sont différentes, c'est-à-dire qu'elles ont une longueur différente, ou bien elles ont une position qui contient un symbole différent.

Pour chacune des formules suivantes, vous devez (1) donner un univers contenant au moins trois chaînes qui rendent la formule vraie; et (2) donner un univers contenant au moins trois chaînes qui rendent la formule fausse. Vous pouvez répéter la même chaîne plusieurs fois dans votre univers. Vous n'avez pas à vous justifier. Par contre, si (1) ou (2) est impossible, vous devez justifier pourquoi (ceci survient quand la formule est une tautologie ou une contradiction).
Je fais le premier afin de donner un exemple.

a. $\forall x \cdot \forall y \cdot (num(x) \wedge alpha(y) \Rightarrow plusCourt(x, y))$
Réponse:
Pour rendre vrai: `115, allo, bonjour`
Pour rendre faux: `503711, allo, bonjour`

b. $\forall x \cdot \forall y \cdot (plusCourt(x, y) \Rightarrow num(x) \wedge alpha(y))$

c. $\forall x \cdot \forall y \cdot (alpha(x) \wedge num(y) \Rightarrow diff(x, y))$

d. $\exists x \cdot \forall y \cdot (diff(x, y) \Rightarrow plusCourt(x, y))$

e. $\forall x \cdot \exists y \cdot (plusCourt(x, y))$

f. $(\exists x \cdot \neg(alpha(x) \vee num(x))) \Rightarrow \neg(\exists x \cdot (alpha(x) \vee num(x)))$

g. $\forall x \cdot \exists y \cdot \forall z \cdot (alpha(x) \wedge alpha(z) \wedge plusCourt(z, x) \Rightarrow num(y) \wedge plusCourt(z, y))$

Question 3 : arbres de preuves (5×7 points)

Construisez l'arbre de preuve de chacun des énoncés suivants. Je joins une version texte que vous pouvez copier-coller dans Panda. Vous pouvez remettre une capture d'écran de Panda.

a. $\neg\neg p \Rightarrow p \vee q$

   ((not (not p)) imply (p or q))

b. $((p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge ((\neg p) \vee q)))$

   ((p and q) imply (p and ((not p) or q)))

c. $(((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge p) \Rightarrow r$

   ((((p or q) imply r) and p) imply r)

d. $(p \vee \neg p) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (p \vee (\neg p \wedge q)))$

   ((p or (not p)) imply ((p or q) imply (p or ((not p) and q))))

e. $(\neg p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

   ((((not p) or q) and (not q)) imply (not p))

   Note: pour ce dernier exercice, vous aurez sans doute besoin des règles $E_\perp$ et $I_\perp$. Le symbole $\perp$ représente "faux" (certains appellent $\perp$ la "contradiction"). La règle $I_\perp$ dit que $p \wedge \neg p$ est toujours faux. La règle $E_\perp$ dit que "faux" implique n'importe quoi.