Algos gloutons

21 septembre 2021 14:17

Principe : algoGlouton(X)

$S = \emptyset$

tant que S n'est pas une sol faisable

  ajoute à S l'elt le plus "prometteur" maintenant

return S

SET-COVER

Entrée : univers $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, ensembles $S = \{S_1, \dots, S_m\}$

Sortie : $S' \subseteq S$ qui minimise $|S'|$ t.q.

$$\bigcup_{S_i \in S'} S_i = U.$$

setcoverGlouton(U, S)

$S' = \emptyset$

$R = U$ //restant à couvrir

tant que $R \neq \emptyset$

  Trouver $S_i \in S$ qui maximise $|S_i \cap R|$

  S'.insert(S_i)

  $R = R \setminus S_i$

return S'

Thm : setCoverGlouton est une $O(\log n)$-approximation.

$\Rightarrow \exists c$ t.q. pour n assez grand, c'est une $c \cdot \log n$-approx. ($n = |U| = \#$ elts)

$$APP \leq c \cdot \log n \cdot OPT$$

Preuve : soit S' la sol retournée par l'algo et soit

S^* ... ($APP = |S'|$, $OPT = |S^*|$)

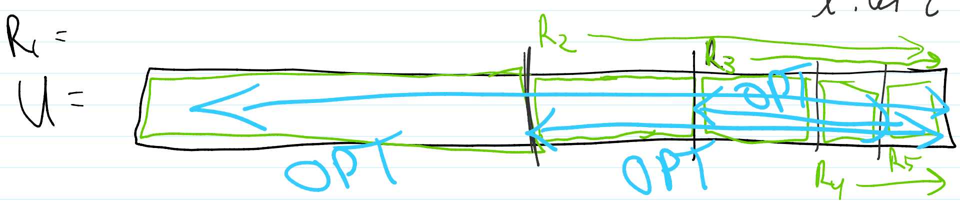
<u>Preuve</u>: soit S' la sol retournée par l'algo et soit S^* une sol. opt. $(APP = |S'|,\ OPT = |S^*|)$

Soit R_1 le # d'elts restant à couvrir au début de l'iter. 1

Soit R_2 le # d'elts " " " au début de l'iter 2

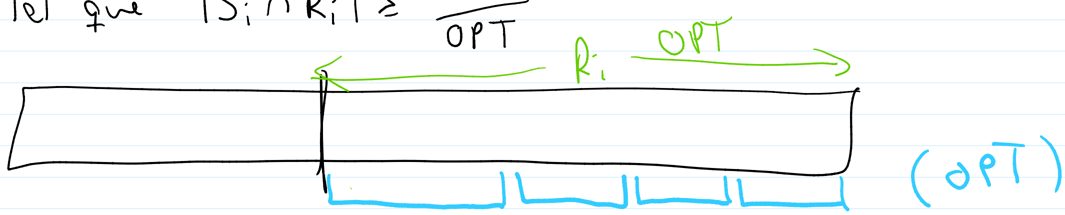
...

Soit R_i le # d'elts " " " au début de l'iter i



On va chercher le i tel que $|R_i| \leq 1$.
Ce i nous donne le # d'itérations faites par glouton.

- Pour une itération i donnée, on remarque qu'il est possible de couvrir R_i avec OPT ensembles (car $R_i \subseteq U$)
- Ceci implique qu'à la i-ème itération, $\exists S_i \in S$ tel que $|S_i \cap R_i| \geq \frac{|R_i|}{OPT}$



- Puisque l'algo glouton maximise $|S_i \cap R_i|$, il choisira un S_i t.q. $|S_i \cap R_i| \geq \frac{|R_i|}{OPT}$
- Après avoir choisi ce S_i, le # d'elts restants est $|R_{i+1}| = |R_i| - |S_i \cap R_i| \leq |R_i| - \frac{|R_i|}{OPT}$

$$= |R_i| \left(1 - \frac{1}{OPT}\right)$$

$$\Rightarrow |R_1| = U = n \qquad |R_2| = n\left(1 - \frac{1}{OPT}\right) \qquad |R_3| = n\left(1-\frac{1}{OPT}\right)\left(1-\frac{1}{OPT}\right)$$

$$|R_i| \leq n\left(1 - \frac{1}{OPT}\right)^{i-1}$$

Si on met $i = OPT \cdot \ln n + 1$, alors

$$|R_i| \leq n\left(1 - \frac{1}{OPT}\right)^{OPT \cdot \ln n} = n\left(\left(1-\frac{1}{OPT}\right)^{OPT}\right)^{\ln n}$$

$$\leq n \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n}$$

$$= n \cdot \left(\frac{1}{e^{\ln n}}\right)$$

$$= n \cdot \left(\frac{1}{e^{\log_e n}}\right)$$

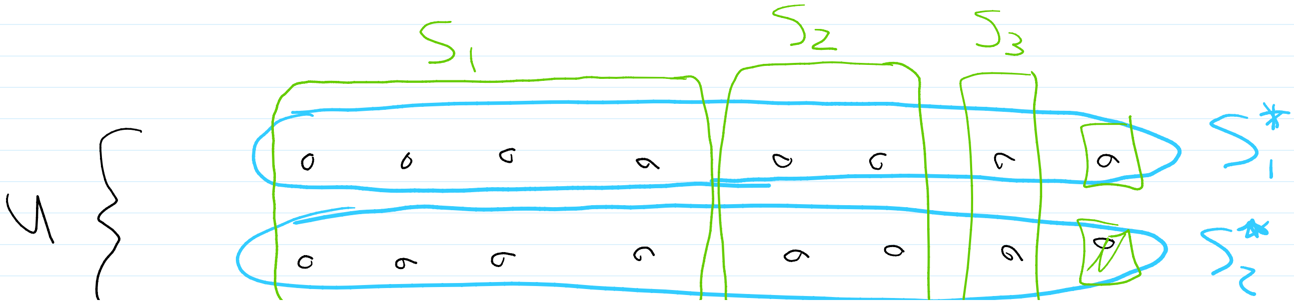
$$= n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

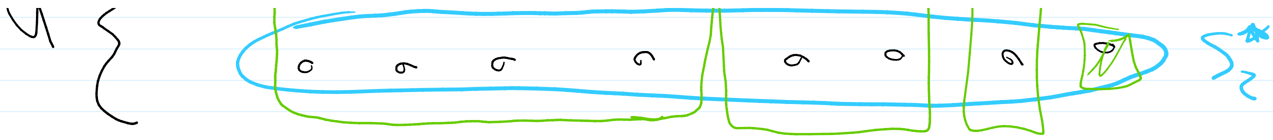
Donc au pire, l'itération $OPT \cdot \ln n + 1$ est la dernière.

$$\Rightarrow APP \leq OPT \cdot \ln n + 1 \in O(\log n) \cdot OPT. \qquad \blacksquare$$

Cette analyse est serrée (à une constante près)

$\exists c$ t.q. cet algo n'est mieux qu'une $c \cdot \log n$-approx





OPT = 2 APP = 5