Algos probabilistes

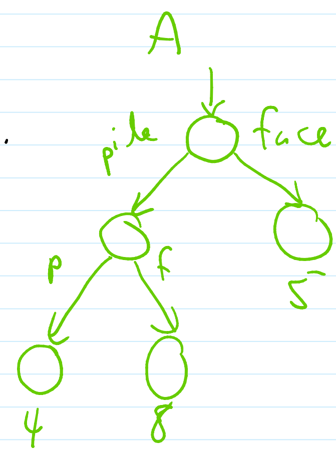
23 septembre 2021 10:07

Algo qui peut faire des choix selon une source de hasard.

- la sol. retournée dépend de ces choix, et donc APP est une var. aléatoire.
- on analyse APP en espérance. (expectation)

Soit A un algo probabiliste
Soit APP(A) la valeur de la sol. retournée par A. (var. aléatoire).
Pour une valeur numérique K, on dénote

$Pr[APP(A) = K]$ = proba. que A retourne une sol. de valeur K.



$Pr[APP(A)=5] = \frac{1}{2}$
$Pr[APP(A)=4] = \frac{1}{4}$

L'espérance de A est la "moyenne" de K, pondérée par leur proba.

$$\mathbb{E}[APP(A)] = \sum_K K \cdot Pr[APP(A)=K]$$

- On dit que A est une c-approx. probabiliste si:
  - A s'exécute <u>toujours</u> en temps polynomial
  - si A résout un pb de minimisation
    $\forall$ instance, $\mathbb{E}[APP(A)] \leq c \cdot OPT$ $\quad c \geq 1$

    si A résout un pb de max.
    $\forall$ instance, $\mathbb{E}[APP(A)] \geq c \cdot OPT$ $\quad c \leq 1$

si A resoul un pb de max.

$\forall$instance, $\mathbb{E}[APP(A)] \geq c \cdot OPT$ $\quad c \leq 1$

Thm: [linéarité de l'espérance]

soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des vars. aléatoires,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

$\frac{1}{2}$-approx proba. pour MAX-CUT

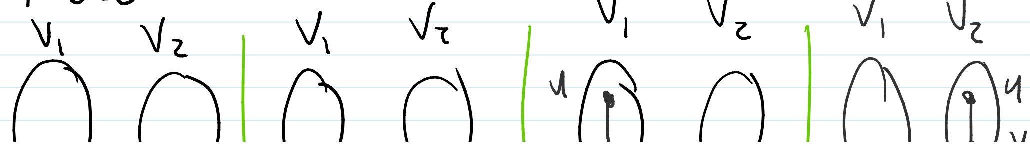
Idée: $\forall v \in V(G)$, mettre v dans V_1 avec prob $\frac{1}{2}$
V_2 avec prob $\frac{1}{2}$

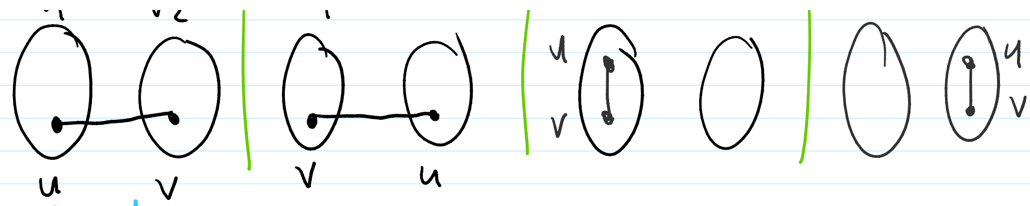
```
maxcutRando( G )
    V1 = ∅ , V2 = ∅
    pour v ∈ V(G)
        res = lancerPiece()   //pile = 1/2  face = 1/2
        si res = pile
        |  V1.add(v)
        sinon
        |  V2.add(v)
    x
    return (V1, V2)
```

$O(n)$

Intuition: $\forall uv \in E(G)$, uv a $\frac{1}{2}$ chance de traverser

4 scénarios





$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$$\underbrace{\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2} \text{ chance d'avoir uv qui traverse}} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}$$

Thm : maxcutRando est une $\frac{1}{2}$-approx proba.

Preuve: I_{uv} var. indicatrice indiquant si uv traverse

$\forall uv \in E(G)$, on définit

$$I_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in V_1, v \in V_2 \text{ ou } u \in V_2, v \in V_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $APP = \sum_{uv \in E} I_{uv}$

$$\mathbb{E}[APP] = \mathbb{E}\Big[\sum_{uv \in E} I_{uv}\Big] = \sum_{uv \in E} \mathbb{E}[I_{uv}]$$

Que vaut $\mathbb{E}[I_{uv}]$?

Tel qu'argumenté plus haut, on a une chance sur deux que uv traverse (une chance une deux que uv ne traverse pas).

$$\Rightarrow \mathbb{E}[I_{uv}] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[I_{uv}] = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[APP] = \sum_{uv\in E} \mathbb{E}[I_{uv}] = \sum_{uv\in E} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot m \quad (m = |E(G)|)$$

Bien sûr, $OPT \leq m$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[APP] = \frac{1}{2}\cdot m \geq \frac{1}{2}\cdot OPT. \quad \blacksquare$$