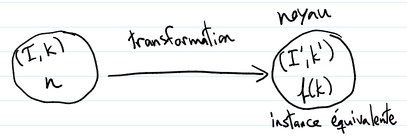
Kernelisation

Réduction au noyau



Si on arrive à faire ça, le pb est FPT car on peut faire une $\underbrace{\text{force}}_{\text{brute}}$ sur (I', k')

<u>Définition</u> : soit (I, k) une instance param., on dit qu'une autre instance (I', k') est un <u>noyau</u> de (I, k) si

① $|I'| \leq f(k)$ pour une fct f de k

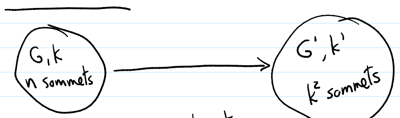
② $k' \leq g(k)$ pour une fct g de k

③ (I, k) admet une solution si et seulement si (I', k') admet une solution

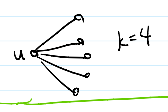
④ On peut transformer (I, k) en (I', k') en temps $O(n^c)$ (k < n)

~~pas $O(2^k n^c)$~~

<u>Vertex-cover</u>

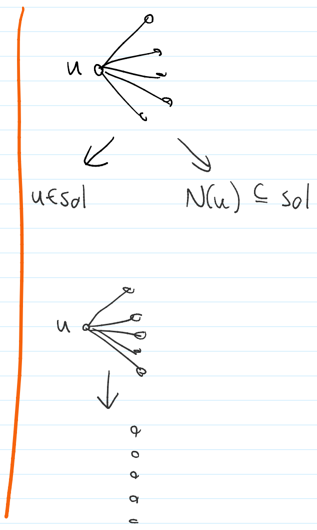


Ex de règle de réduction :
si un sommet u a > k voisins, il faut inclure u dans la sol



- Une règle de réduction transformer (I, k) en (I', k') t.q. $|I'| < |I|$
- Une règle de réduction est <u>saine</u> (safe) si elle préserve l'équivalence

(I, k) a une sol ⟺ (I', k') a une sol

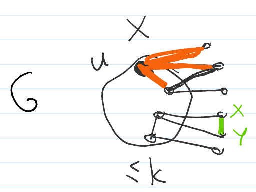


<u>Règle 1</u> : si $\exists u \in V$ t.q. $|N(u)| > k$, retirer u et réduire k de 1

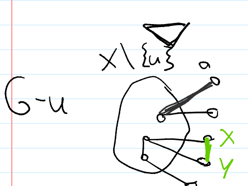
$(G, k) \longrightarrow (G-u, k-1)$

<u>Lemme</u> : la règle 1 est saine.

Preuve : ⇒ soit X un vc (vertex-cover) de G avec $|X| \leq k$. À montrer : ∃ vc X' de G-u avec $|X'| \leq k-1$.

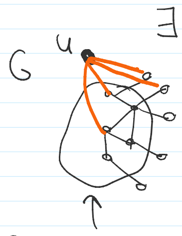


Il faut que $u \in X$ (sinon on aurait $N(u) \subseteq X$, contradiction).
Donc, $X \setminus \{u\}$ a une taille $\leq k-1$, et $X \setminus \{u\}$ couvre toutes les arêtes de G-u.

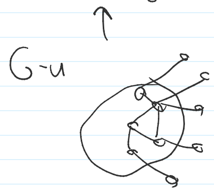


Pour voir $X \setminus \{u\}$ est un vc de G-u, prenons une arête xy de G-u.
Supposons que xy n'est pas couverte par $X \setminus \{u\}$.
Alors $x \notin X \setminus \{u\}$ et $y \notin X \setminus \{u\}$.
Puisque $x \neq u$ et $y \neq u$, $x, y \notin X$
⇒ ceci contredit que X est un vc pour G.

⇐ soit X' un vc de G-u de taille ≤ k-1. À montrer : ∃ vc X de G de taille ≤ k.



X' couvre toutes les arêtes de G qui n'impliquent pas u. Donc $X' \cup \{u\}$ couvre toutes les arêtes de G. ☒



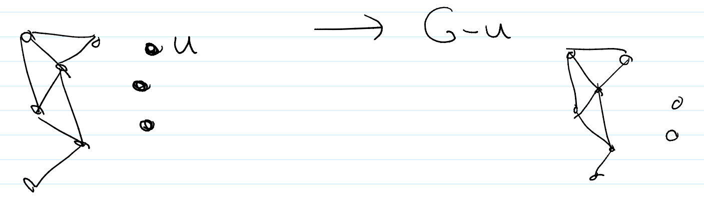
<u>Règle 2</u> : si $\exists u \in V$ t.q. $|N(u)| = 0$, retirer u de V (ne pas changer k).

$(G, k) \longrightarrow (G-u, k)$

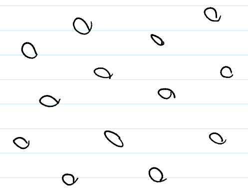
<u>Lemme</u> : la règle 2 est saine.

Lemme : la règle 2 est saine.

G:



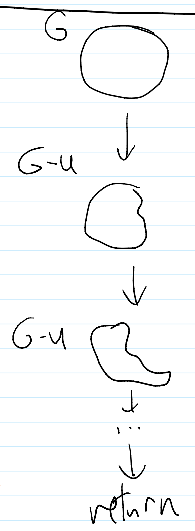
G:



Lemme : Supposons qu'on a appliqué les règles 1 et 2 sur jusqu'à ce qu'on ne puisse plus.
Alors, si G admet un vc de taille $\leq k$, il faut que G ait $\leq k^2$ arêtes et $\leq 2k^2$ sommets.

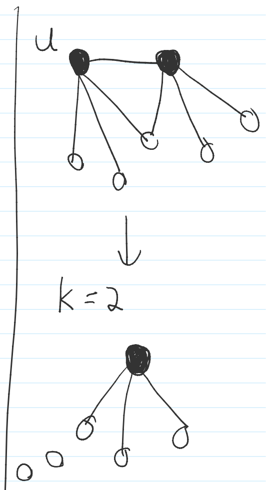
---

vcNoyau(G, k)
 si $k < 0$, return null
 si $|V(G)| \leq 2k^2$ et $|E(G)| \leq k^2$
  return (G, k)
R1 si $\exists u \in V(G)$ avec $|N(u)| > k$
  return vcNoyau(G-u, k-1)
R2 si $\exists u \in V(G)$ avec $|N(u)| = 0$
  return vcNoyau(G-u, k)
 return null



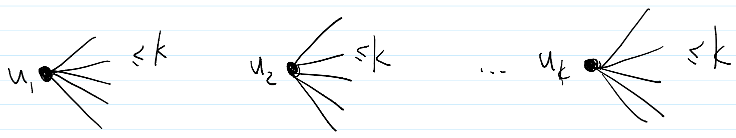
vcNoyau(G, k)
 fini = true
 tant que ¬fini
  si $\exists u \in V$ avec $|N(u)| > k$
   G = G-u
   k -= 1
  sinon si $\exists u \in V$ avec $|N(u)| = 0$
   G = G-u
  sinon
   fini = true
 si $|V| > 2k^2$ ou $|E| > k^2$
  return null
 return (G, k)

k = 3

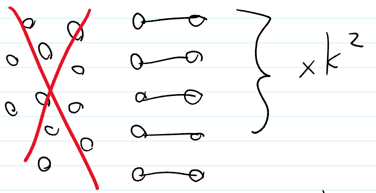


Prouvons le lemme : si G une a sol $\leq k$, alors $|E| \leq k^2$ et $|V| \leq 2k^2$

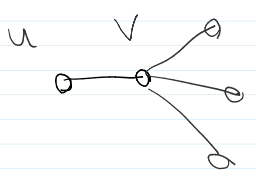
Après application de la Règle 1, chaque $u \in V(G)$ a au plus k voisins.
Donc, chaque $u \in V(G)$ couvre au plus k arêtes.
Donc, si G admet un vc de taille $\leq k$, il ne peut pas y avoir plus que $k \cdot k = k^2$ arêtes.



Pour $|V(G)| \leq 2k^2$, le graphe avec un max de sommets et k^2 d'arêtes est



qui a $2k^2$ sommets (ceci est vrai car il n'y a pas de sommet isolé, par la règle 2).



→ inclure son voisin v dans la sol.

si u a un voisin

Max-3-SAT

<u>Entrée:</u> clauses $C_1, C_2, \dots, C_m$ chacune avec 3 variables $\quad C_i : x_a \vee \bar{x}_b \vee x_c$
<u>Param:</u> k = # de clauses à satisfaire
<u>Sortie:</u> assignation qui sat. au moins k clauses, ou null si $\nexists$

Trouver un noyau

- Rappel: $\exists$ algo qui sat. $\geq 7m/8$ clauses
- <u>Règle 1:</u> si $k \leq 7m/8$, exécuter cet algo et retourner une assignation qui sat. k clauses (pas besoin de noyau).

"Above guarantee"
Param: $\frac{7m}{8} + \underline{k}$

On peut supposer que $k > 7m/8 \Rightarrow \frac{8k}{7} > m$

$\Rightarrow m < \frac{8k}{7}$

- Le # de clauses est déjà $\leq f(k)$
- Le # de variables est-il $\leq f(k)$

Chaque C_i a 3 variables
Il y a $< \frac{8k}{7}$ clauses $\Rightarrow 3 \cdot \frac{8k}{7}$ variables dans les clauses
$\Rightarrow \frac{24k}{7}$ variables

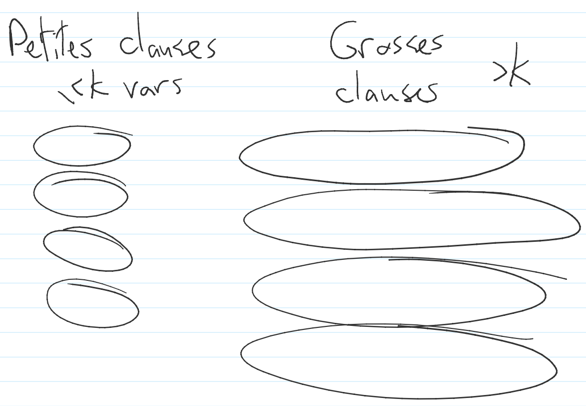
<u>Règle 2:</u> si une var. x_i n'est dans aucune clause, retirer x_i

Après application des 2 règles, on a $\leq \frac{8k}{7}$ clauses et $\frac{24k}{7}$ variables

MAX-SAT

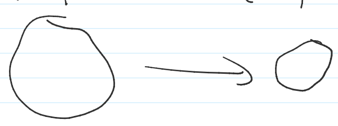
Clauses de taille non-bornée

$< \frac{8k}{7}$ clauses $\qquad$ Borner #vars?



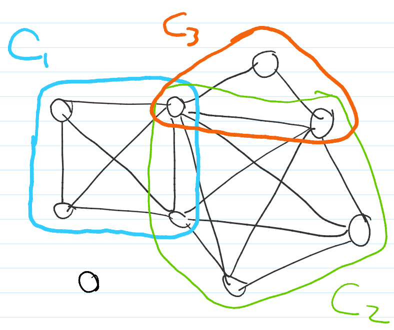
EDGE-CLIQUE-COVER

$(I, k) \qquad (I', k') \to |I'| \leq f(k)$

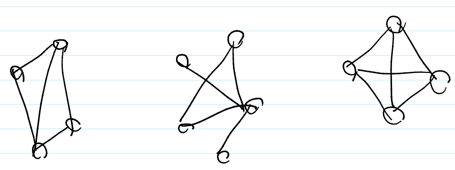


Noyau de taille $O(2^k)$

<u>Entrée:</u> graphe $G = (V, E)$
<u>Param:</u> k = nombre de clique
<u>Sortie:</u> un ensemble de k cliques de G, possiblement chevauchantes, tel que $\forall uv \in E$, il existe une des cliques qui contient uv.



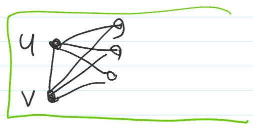
$k = 3$



c_2

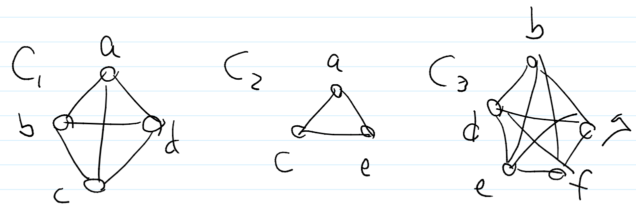
Règle 1 : s'il $\exists u \in V$ avec $|N(u)| = 0$, retirer u.

Règle 2 : s'il $\exists$ une composante connexe qui est déjà une clique, la retirer et réduire k de 1.

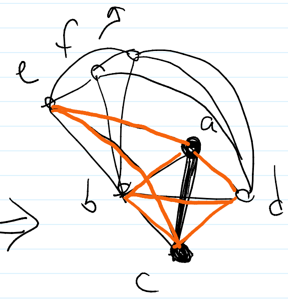


Règle 3 : s'il $\exists u, v$ tels que $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$, retirer u de G.

Sol. de taille k :



$\Rightarrow$



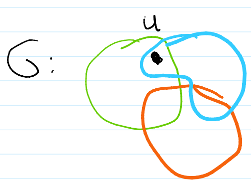
- si les C_i sont grosses, certains sommets apparaîtront exactement dans les mêmes cliques
- si 2 sommets apparaissent dans les mêmes cliques, leur voisinage est identique.
- si u, v ont les mêmes voisins, l'un d'entre eux est redondant

(G, k) a une sd $\iff$ $(G-u, k)$ a une sd

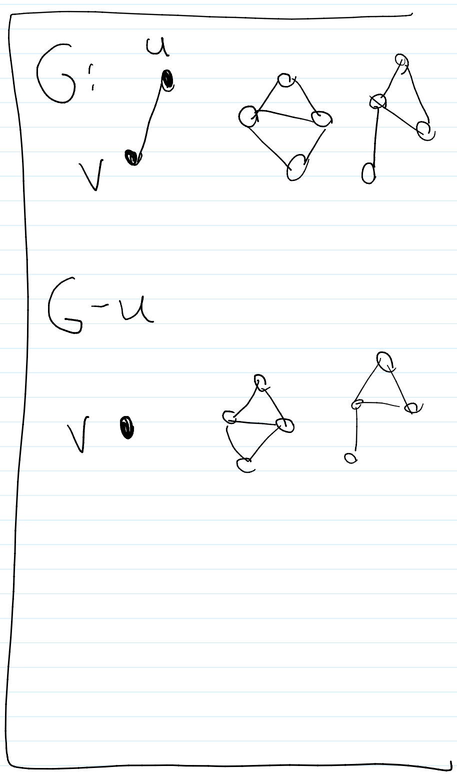
Règle 3 : s'il $\exists u, v$ tels que $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$, retirer u de G.

Sanité de la règle. À prouver : (G, k) admet une couverture avec k cliques $\iff$ $(G-u, k)$ admet une couv. avec k cliques

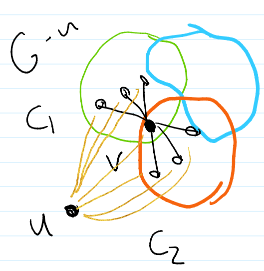
$\Rightarrow$ soient $C_1, \dots, C_k$ des cliques de G qui couvrent E.



Si on considère $C_1 - u, C_2 - u, \dots, C_k - u$, on voit qu'on a encore que des cliques de $G-u$ et elles couvrent $E(G-u)$ car $C_1, \dots, C_k$ couvrait déjà $E(G-u)$, en particulier.

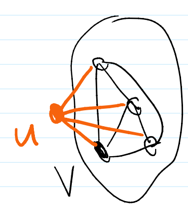


$\Leftarrow$ soit $C_1, \dots, C_k$ des cliques de $G-u$ qui couvrent $E(G-u)$.

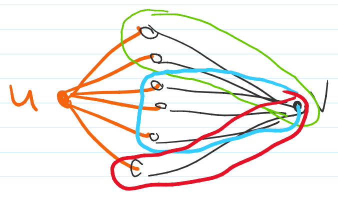


Soit $v \in V(G)$ le jumeau de u, ie $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$. Alors $v \in V(G-u)$.

Pour chaque C_i qui contient v, on ajoute u à cette clique. (un tel C_i existe par la règle 2). Puisque u et v sont jumeaux, $C_i \cup \{u\}$ est une clique :



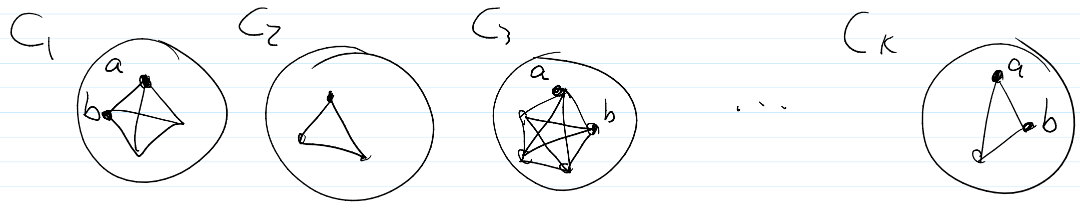
De plus, chaque arête qui touche u est couverte par les $C_i \cup \{u\}$ car chaque arête qui touchait par les $C_i \cup \{u\}$ car chaque arête qui touchait v était couverte précédemment.



$\blacksquare$

Théorème : après application des règles 1-2-3, si G peut être couvert avec $\leq k$ cliques, alors $|V(G)| \leq 2^k$.

Soit $C_1, C_2, \dots, C_k$ k cliques de G qui couvrent les arêtes.



$B_a = (1, 0, 1, \dots, 1)$

Pour $u \in V(G)$, on définit B_u un vecteur de dim. k tel que

$$B_u[i] = \begin{cases} 0 & \text{si } u \notin C_i \\ 1 & \text{si } u \in C_i \end{cases}$$

Par la règle 3, $\forall u, v$ distincts, on aura $B_u \neq B_v$ (exercice)
(sinon ils seraient jumeaux)

Il y a 2^k vecteurs possibles, et puisque chaque u correspond à un B_u distinct, il faut que $|V(G)| \leq 2^k$. $\blacksquare$

Vertex-cover $\rightarrow$ noyau $2k$ (vu k^2)

Le LP de vertex-cover

$$\min. \sum_{v_i \in V} x_i$$

sujet à $x_i + x_j \geq 1 \quad \forall v_i v_j \in E$

$0 \leq x_i \leq 1$

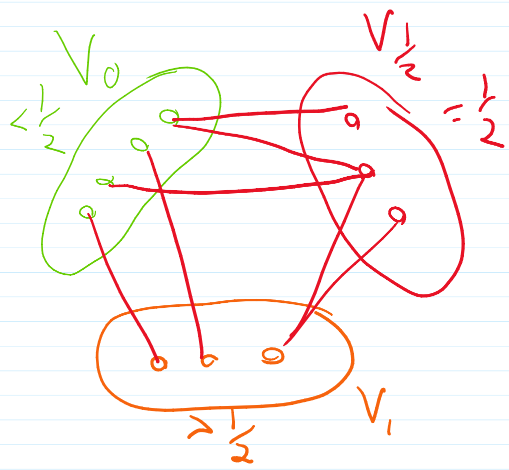
Lemme : soit x^* une sol. opt. à ce LP.

Soit

$V_0 = \{ v_i : x_i^* < \frac{1}{2} \}$

$V_{\frac{1}{2}} = \{ v_i : x_i^* = \frac{1}{2} \}$

$V_1 = \{ v_i : x_i^* > \frac{1}{2} \}$



Il existe un vertex-cover optimal X de G t.q.
$V_1 \subseteq X \subseteq V_1 \cup V_{\frac{1}{2}}$

Règle 1 : retirer V_0 de G, et inclure V_1 et réduire k de $|V_1|$.

Après la règle 1, il ne reste que $V_{\frac{1}{2}}$. Ce $V_{\frac{1}{2}}$ est notre noyau.

Après la règle 1, il ne reste que $V_{\frac{1}{2}}$. Ce $V_{\frac{1}{2}}$ est notre noyau.

À argumenter : $|V_{\frac{1}{2}}| \leq 2k$ s'il $\exists$ sd. de taille k.

Pour le voir : $\sum_{v_i \in V} x_i^* \leq k$ sinon, pas de sol

Borner $|V_{\frac{1}{2}}|$: $|V_{\frac{1}{2}}| = \sum_{v_i \in V_{\frac{1}{2}}} 1 = \sum_{v_i \in V_{\frac{1}{2}}} 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \sum_{v_i \in V_{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2} = 2 \sum_{v_i \in V_{\frac{1}{2}}} x_i^* \leq 2 \sum_{v_i \in V} x_i^*$

$\leq 2k$

Thm : un pb P admet un algo FPT

$\iff$

il existe un noyau pour P