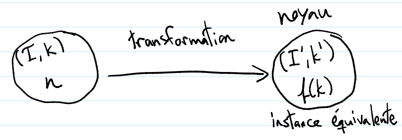
Kernelisation
11 novembre 2021 10:23

Réduction au noyau



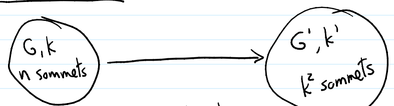

Si on arrive à faire ça, le pb est FPT
car on peut faire une $\underbrace{\text{force}}_{\text{brute}}$ sur $(I',k')$

<u>Définition</u> : soit $(I,k)$ une instance param., on dit qu'une autre instance $(I',k')$ est un <u>noyau</u> de $(I,k)$ si

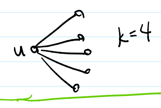
① $|I'| \leq f(k)$ pour une fct f de k
② $k' \leq g(k)$ pour une fct g de k
③ $(I,k)$ admet une solution si et seulement si $(I',k')$ admet une solution
④ On peut transformer $(I,k)$ en $(I',k')$ en temps $O(n^c)$ $(k<n)$

~~pas $O(2^k n^c)$~~

<u>Vertex-cover</u>

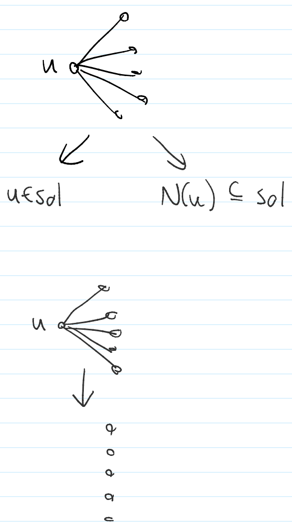



Ex de règle de réduction :
si un sommet u a >k voisins,
il faut inclure u dans la sol




- Une règle de réduction transformer $(I,k)$ en $(I',k')$ t.q. $|I'| < |I|$
- Une règle de réduction est <u>saine</u> (safe) si elle préserve l'équivalence

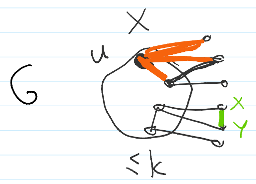
$(I,k)$ a une sol $\Leftrightarrow$ $(I',k')$ a une sol



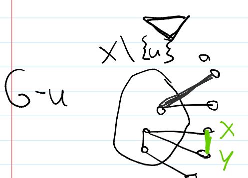

<u>Règle 1</u> : si $\exists u \in V$ t.q. $|N(u)| > k$, retirer u et réduire k de 1
$(G,k) \longrightarrow (G-u, k-1)$

<u>Lemme</u> : la règle 1 est saine.

Preuve : $\Rightarrow$ soit X un vc (vertex-cover) de G avec $|X| \leq k$. À montrer : $\exists$ vc X' de G-u avec $|X'| \leq k-1$.

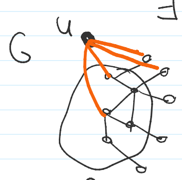



Il faut que $u \in X$ (sinon on aurait $N(u) \subseteq X$, contradiction).
Donc, $X \setminus \{u\}$ a une taille $\leq k-1$, et $X \setminus \{u\}$ couvre toutes les arêtes de G-u.

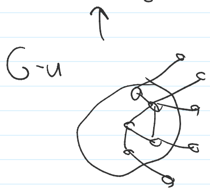



Pour voir $X \setminus \{u\}$ est un vc de G-u, prenons une arête xy de G-u.
Supposons que xy n'est pas couverte par $X \setminus \{u\}$.
Alors $x \notin X \setminus \{u\}$ et $y \notin X \setminus \{u\}$.
Puisque $x \neq u$ et $y \neq u$, $x, y \notin X$
$\Rightarrow$ ceci contredit que X est un vc pour G.

$\Leftarrow$ soit X' un vc de G-u de taille $\leq k-1$. À montrer : $\exists$ vc X de G de taille $\leq k$.



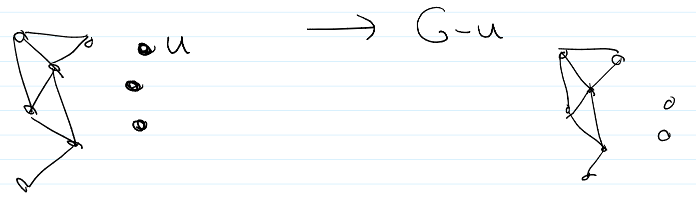

X' couvre toutes les arêtes de G qui n'impliquent pas u. Donc $X' \cup \{u\}$ couvre toutes les arêtes de G. ☑

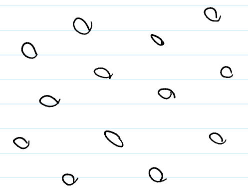



<u>Règle 2</u> : si $\exists u \in V$ t.q. $|N(u)| = 0$, retirer u de V (ne pas changer k).
$(G,k) \longrightarrow (G-u, k)$

<u>Lemme</u> : la règle 2 est saine.

Lemme : la règle 2 est saine.

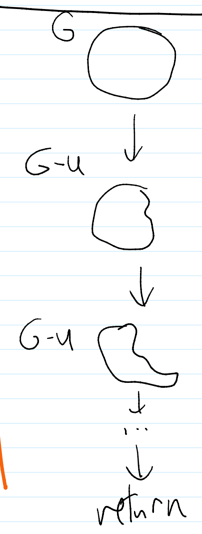
G : 

G : 

Lemme : Supposons qu'on a appliqué les règles 1 et 2 sur jusqu'à ce qu'on ne puisse plus.
Alors, si G admet un vc de taille $\leq k$, il faut que G ait $\leq k^2$ arêtes et $\leq 2k^2$ sommets.

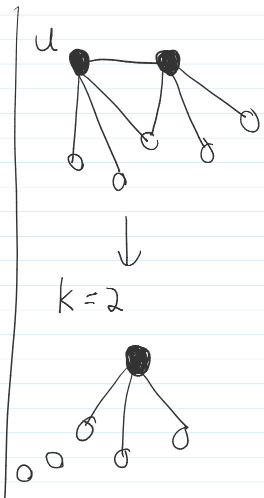
---

vcNoyau( G, k )
  si k < 0, return null
  si $|V(G)| \leq 2k^2$ et $|E(G)| \leq k^2$
    return ( G, k )
R1  si $\exists u \in V(G)$ avec $|N(u)| > k$
    return vcNoyau( G−u, k−1 )
R2  si $\exists u \in V(G)$ avec $|N(u)| = 0$
    return vcNoyau( G−u, k )
  return null




vcNoyau( G, k )
  fini = true
  tant que ¬fini
    si $\exists u \in V$ avec $|N(u)| > k$
      G = G − u
      k − = 1
    sinon si $\exists u \in V$ avec $|N(u)| = 0$
      G = G − u
    sinon
      fini = true
  si $|V| > 2k^2$ ou $|E| > k^2$
    return null
  return ( G, k )

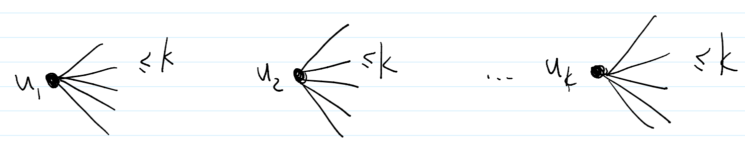
$k = 3$



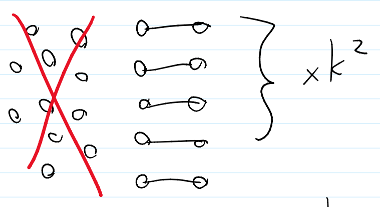

---

Prouvons le lemme : si G une a sol $\leq k$, alors $|E| \leq k^2$ et $|V| \leq 2k^2$

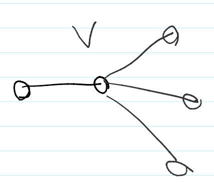
Après application de la Règle 1, chaque $u \in V(G)$ a au plus $k$ voisins.
Donc, chaque $u \in V(G)$ couvre au plus $k$ arêtes.
Donc, si G admet un vc de taille $\leq k$, il ne peut pas y avoir plus que $k \cdot k = k^2$ arêtes.




Pour $|V(G)| \leq 2k^2$, le graphe avec un max de sommets et $k^2$ d'arêtes est




qui a $2k^2$ sommets (ceci est vrai car il n'y a pas de sommet isolé, par la règle 2).




→ inclure son voisin v dans la sol

si u a un voisin

---

## Max-3-SAT

Entrée: clauses $C_1, C_2, \ldots, C_m$ chacune avec 3 variables $\quad C_i : x_a \vee \overline{x}_b \vee x_c$
Param: $k$ = # de clauses à satisfaire
Sortie: assignation qui sat. au moins $k$ clauses, ou null si $\nexists$

Trouver un noyau

- Rappel: $\exists$ algo qui sat. $\geq 7m/8$ clauses
- Règle 1: si $k \leq 7m/8$, exécuter cet algo et retourner une assignation qui sat. $k$ clauses (pas besoin de noyau).

On peut supposer que $k > 7m/8 \Rightarrow \frac{8k}{7} > m$

$\Rightarrow m < \frac{8k}{7}$

"Above guarantee"
Param: $\frac{7m}{8} + \underline{k}$

- Le # de clauses est déjà $\leq f(k)$
- Le # de variables est-il $\leq f(k)$

Chaque $C_i$ a 3 variables

Il y a $< \frac{8k}{7}$ clauses $\Rightarrow 3 \cdot \frac{8k}{7}$ variables dans les clauses

$\Rightarrow \frac{24k}{7}$ variables

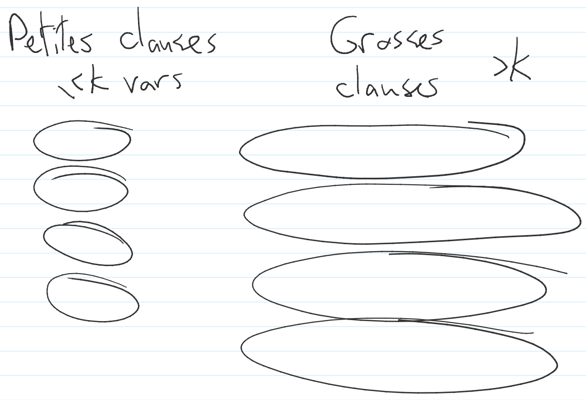
Règle 2: si une var. $x_i$ n'est dans aucune clause, retirer $x_i$

Après application des 2 règles, on a $\leq \frac{8k}{7}$ clauses et $\frac{24k}{7}$ variables

## MAX-SAT

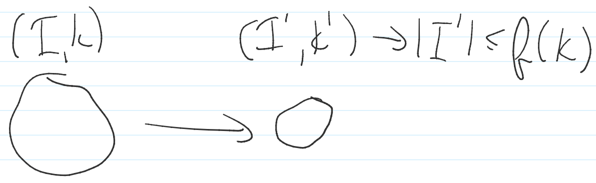
Clauses de taille non-bornée

$< \frac{8k}{7}$ clauses $\qquad$ Borner #vars?



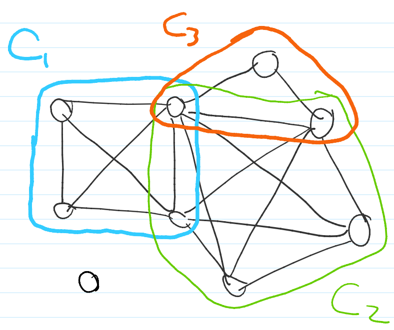

---

## EDGE-CLIQUE-COVER

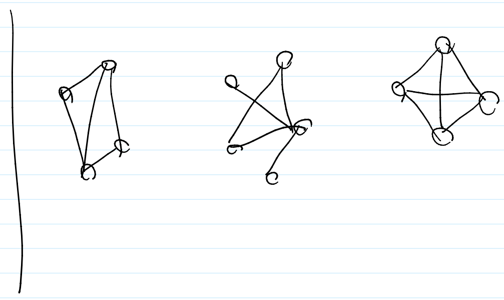



Noyau de taille $O(2^k)$

Entrée: graphe $G = (V, E)$
Param: $k$ = nombre de clique
Sortie: un ensemble de $k$ cliques de $G$, possiblement chevauchantes, tel que $\forall uv \in E$, il existe une des cliques qui contient $uv$.

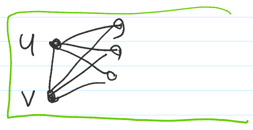



$k = 3$

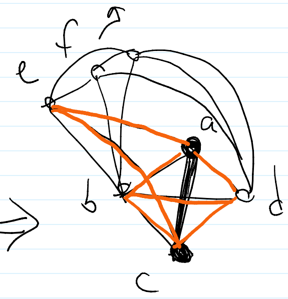


Règle 1 : s'il $\exists u \in V$ avec $|N(u)| = 0$, retirer $u$.

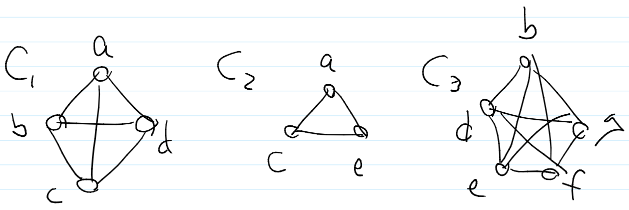
Règle 2 : s'il $\exists$ une composante connexe qui est déjà une clique, la retirer et réduire $k$ de 1.




Règle 3 : s'il $\exists u, v$ tels que $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$, retirer $u$ de $G$.




Sol. de taille k :



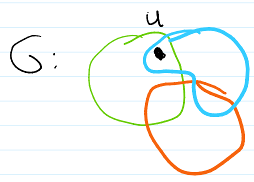

- si les $C_i$ sont grosses, certains sommets apparaîtront exactement dans les mêmes cliques
- si 2 sommets apparaissent dans les mêmes cliques, leur voisinage est identique.
- si $u, v$ ont les mêmes voisins, l'un d'entre eux est redondant

$(G, k)$ a une sd $\Leftrightarrow$ $(G-u, k)$ a une sd

Règle 3 : s'il $\exists u, v$ tels que $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$, retirer $u$ de $G$.

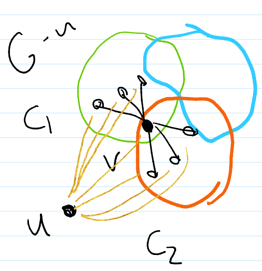
Sanité de la règle. À prouver : $(G,k)$ admet une couverture avec $k$ cliques $\Leftrightarrow (G-u, k)$ admet une couv. avec $k$ cliques

$\Rightarrow$ soient $C_1, \ldots, C_k$ des cliques de $G$ qui couvrent $E$.




Si on considère $C_1 - u, C_2 - u, \ldots, C_k - u$, on voit qu'on a encore que des cliques de $G-u$ et elles couvrent $E(G-u)$ car $C_1, \ldots, C_k$ couvrait déjà $E(G-u)$, en particulier.

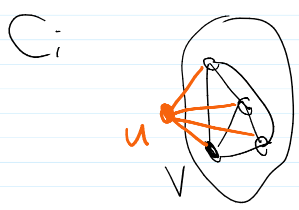
$\Leftarrow$ soit $C_1, \ldots, C_k$ des cliques de $G-u$ qui couvrent $E(G-u)$.




Soit $v \in V(G)$ le jumeau de $u$, ie $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$. Alors $v \in V(G-u)$.

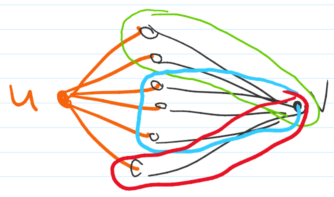
Pour chaque $C_i$ qui contient $v$, on ajoute $u$ à cette clique.

Puisque $u$ et $v$ sont jumeaux, $C_i \cup \{u\}$ est une clique :




De plus, chaque arête qui touche $u$ est couverte par les $C_i \cup \{u\}$ car chaque arête qui touchait

[illegible]
par les $C_i \cup \{u\}$ car chaque arête qui touchait $v$ était couverte précédemment.




$\blacksquare$