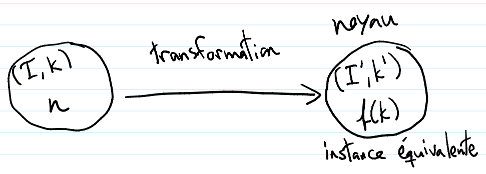
Kernelisation
11 novembre 2021 10:23

Réduction au noyau



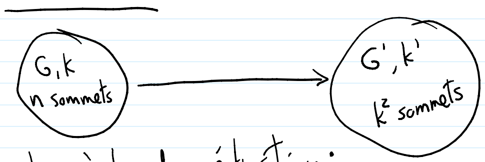
Si on arrive à faire ça, le pb est FPT
car on peut faire une $\underbrace{\text{force}}_{\text{brute}}$ sur (I',k')

Définition : soit (I,k) une instance param., on dit qu'une autre instance (I',k') est un <u>noyau</u> de (I,k) si

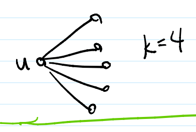
1. $|I'| \leq f(k)$ pour une fct f de k
2. $k' \leq g(k)$ pour une fct g de k
3. (I,k) admet une solution si et seulement si (I',k') admet une solution
4. On peut transformer (I,k) en (I',k') en temps $O(n^c)$ $(k<n)$

pas ~~$O(2^k n^c)$~~

Vertex-cover

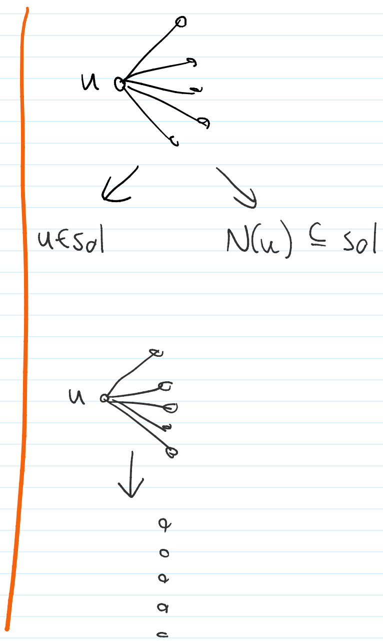


Ex de règle de réduction :
si un sommet u a $>k$ voisins, il faut inclure u dans la sol



- Une règle de réduction transformer (I,k) en (I',k') t.q. $|I'| < |I|$
- Une règle de réduction est <u>saine</u> (safe) si elle préserve l'équivalence

(I,k) a une sol $\Leftrightarrow$ (I',k') a une sol

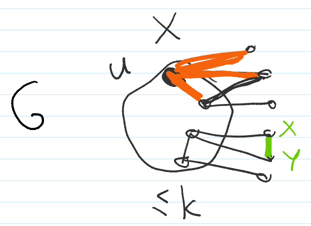


Règle 1 : si $\exists u \in V$ t.q. $|N(u)| > k$, retirer u et reduire k de 1

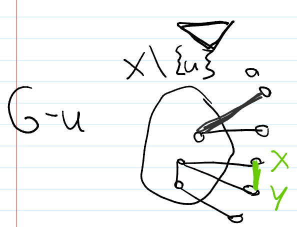
$$(G,k) \longrightarrow (G-u, k-1)$$

Lemme : la règle 1 est saine.

Preuve : $\Rightarrow$ soit X un vc (vertex-cover) de G avec $|X| \leq k$. À montrer : $\exists$ vc X' de $G-u$ avec $|X'| \leq k-1$.



Il faut que $u \in X$ (sinon on aurait $N(u) \subseteq X$, contradiction).
Donc, $X \setminus \{u\}$ a une taille $\leq k-1$, et $X \setminus \{u\}$ couvre toutes les arêtes de $G-u$.

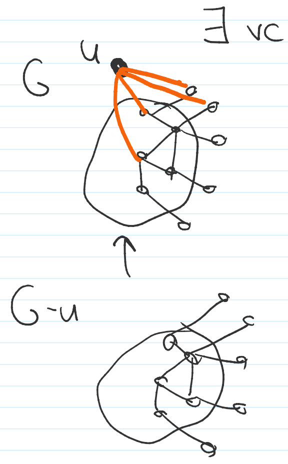


Pour voir $X \setminus \{u\}$ est un vc de $G-u$, prenons une arête xy de $G-u$.
Supposons que xy n'est pas couverte par $X \setminus \{u\}$.
Alors $x \notin X \setminus \{u\}$ et $y \notin X \setminus \{u\}$.
Puisque $x \neq u$ et $y \neq u$, $x, y \notin X$
$\Rightarrow$ ceci contredit que X est un vc pour G.

$\Leftarrow$ soit X' un vc de $G-u$ de taille $\leq k-1$. À montrer : $\exists$ vc X de G de taille $\leq k$.

u

$\exists$ vc X de G de taille $\leq k$.

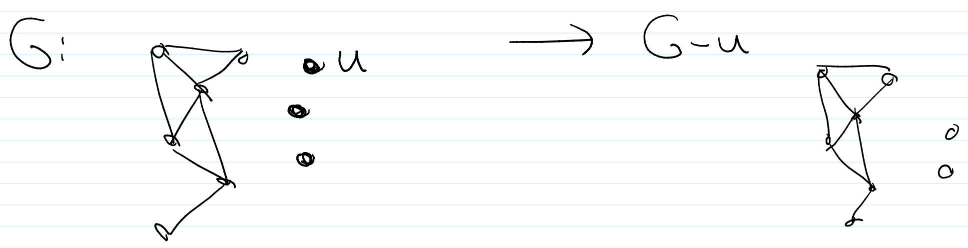


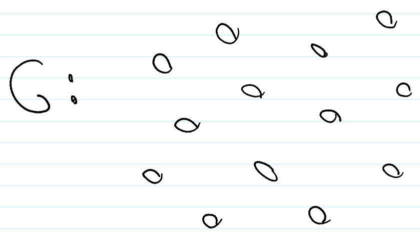
X' couvre toutes les arêtes de G qui n'impliquent pas u. Donc $X' \cup \{u\}$ couvre toutes les arêtes de G. ∎

<u>Règle 2</u>: si $\exists u \in V$ t.q. $|N(u)| = 0$, retirer u de V (ne pas changer k).

$$(G,k) \longrightarrow (G-u, k)$$

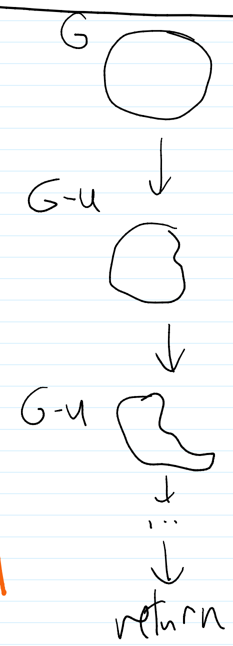
<u>Lemme</u>: la règle 2 est saine.





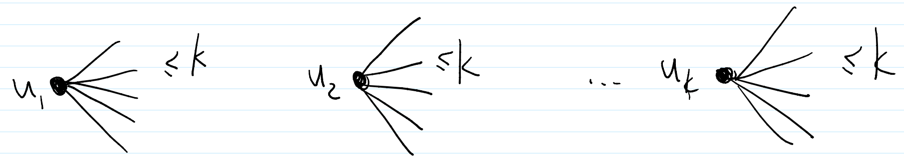
<u>Lemme</u>: Supposons qu'on a appliqué les règles 1 et 2 sur jusqu'à ce qu'on ne puisse plus.
Alors, si G admet un vc de taille $\leq k$, il faut que G ait $\leq k^2$ arêtes et $\leq 2k^2$ sommets.

```
vcNoyau(G,k)
  si k<0, return null
  si |V(G)| ≤ 2k² et |E(G)| ≤ k²
     return (G,k)
R1  si ∃u∈V(G) avec |N(u)|>k
       return vcNoyau(G-u, k-1)
R2  si ∃u∈V(G) avec |N(u)|=0
       return vcNoyau(G-u, k)
  return null
```

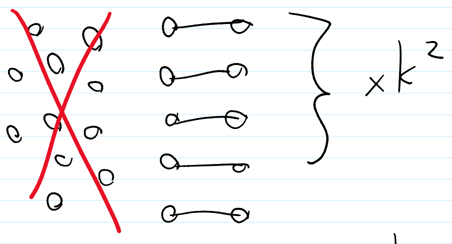


Prouvons le lemme: si G une a sd $\leq k$, alors $|E| \leq k^2$ et $|V| \leq 2k^2$

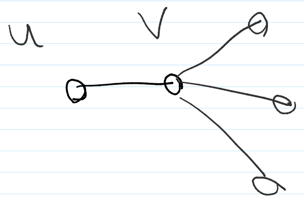
Après application de la Règle 1, chaque $u \in V(G)$ a au plus k voisins.
Donc, chaque $u \in V(G)$ couvre au plus k arêtes.
Donc, si G admet un vc de taille $\leq k$, il ne peut pas y avoir plus que $k \cdot k = k^2$ arêtes.



Pour $|V(G)| \leq 2k^2$, le graphe avec un max de sommets et k^2 d'arêtes est



qui a $2k^2$ sommets (ceci est vrai car il n'y a pas de sommet isolé, par la règle 2).



$\rightarrow$ inclure son voisin v dans la sol.

si u a un voisin

Max-3-SAT

Entrée: clauses $C_1, C_2, \ldots, C_m$ chacune avec 3 variables
Param: k = # de clauses à satisfaire
Sortie: assignation qui sat. au moins k clauses, ou null si $\nexists$

Trouver un noyau