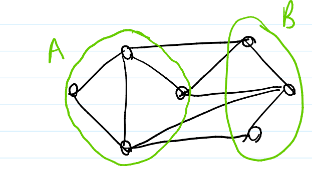
Recherche locale

16 septembre 2021 10:30

Idée: algo(X)

  S = sol initiale arbitraire
  tant qu'il existe S' "proche" de S et qui est meilleure
    $S = S'$
  return S

MAX-CUT



#arêtes traversantes = 5

But: partitionner $V(G)$ en 2 parties en maximisant le # d'arêtes traversantes

Soit $G=(V,E)$ un graphe.
Une bipartition de V est une paire $\{V_1, V_2\}$ t.q. $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$.

On définit
$$E(V_1, V_2) = \{uv \in E : u \in V_1, v \in V_2\}$$

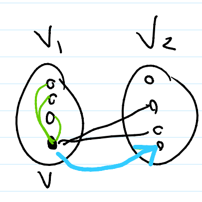
MAX-CUT
 Entrée: graphe $G=(V,E)$
 Sortie: une bipartition (V_1, V_2) qui maximise $|E(V_1, V_2)|$

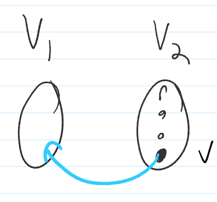
maxcutLocal(G)
  $V_1 = \emptyset$
  $V_2 = V(G)$
  fini = false
  tant que $\neg$ fini
    fini = true
    pour $v \in V_1$
      si $|E(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\})| > |E(V_1, V_2)|$
        $V_1 = V_1 \setminus \{v\}$
        $V_2 = V_2 \cup \{v\}$
        fini = false
    pour $v \in V_2$

$O(n)$ iter

$O(m)$

$O(nm)$





$\quad\quad$ fini = false

pour $v \in V_2$

$\quad$ si $|E(V_1 \cup \{v\}, V_2 \setminus \{v\})| > |E(V_1, V_2)|$ $\quad O(nm)$

$\quad\quad V_1 = V_1 \cup \{v\}$

$\quad\quad V_2 = V_2 \setminus \{v\}$

$\quad\quad$ fini = false

return (V_1, V_2)

$O(n)$ iter

$O(m)$

Thm: maxcutLocal s'éxécute toujours en temps polynomial.

Preuve: à chaque itération, $|E(V_1, V_2)|$ augmente d'au moins 1. De plus $|E(V_1, V_2)|$ est un entier entre 0 et m. $(m = |E(G)|)$.

Donc l'algo fera $O(m)$ itérations.

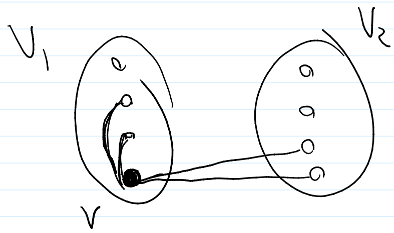
De plus, chaque itération prend un temps $O(n \cdot m)$

$\Rightarrow$ Complexité $O(m \cdot n \cdot m) = O(m^2 n)$ ∎

Thm: maxcutLocal est une $\frac{1}{2}$-approximation

Preuve: On prend $OPT \leq m$ comme borne

On veut montrer que $APP \geq m/2$.



Chaque $v \in V_1$ doit avoir au moins $|N(v)|/2$ dans V_2, car sinon, l'algo aurait envoyé v dans V_2.

Même chose sur les $v \in V_2$.

Donc $|E(V_1, V_2)| \geq \left(\sum_{v \in V_1} |N(v)|/2 + \sum_{v \in V_2} |N(v)|/2 \right) / 2$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in V(G)} |N(v)|/2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sum_{v \in V(G)} |N(v)| \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(2|E(G)| \right) = \frac{1}{4} \cdot (2m) = \frac{1}{2} m. \blacksquare$$