Programmes linéaires / linear program (LP)

28 septembre 2021 14:35

Problème spécifié par

- un critère à optimiser (critère linéaire en des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$)
- un ensemble d'inégalités linéaires à respecter

ex: maximiser $3x_1 + 2x_2 - x_3$

sujet à $x_1 + x_2 \leq 8$

$2x_3 - x_1 \leq 14$

$0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq x_3 \leq 1$

La plupart des pbs algorithmiques peuvent s'exprimer sous la forme d'un prog. linéaire (LP) où les solutions doivent contenir des entiers.

Forme d'un LP

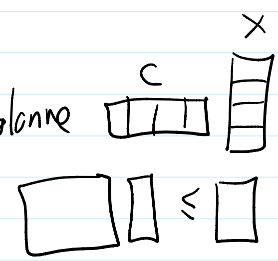
maximiser (ou minimiser) $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ $\qquad c_i$ = constante, x_i = inconnues

sujet à (des contraintes de la forme) $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b_i$ $\qquad a_i, b_i$ = constantes

Forme matricielle

maximiser $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ $\qquad$ c, x = vecteurs colonne

sujet à $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ $\qquad$ A = matrice, b = vecteur



Programme linéaire à entiers

Programme linéaire à entiers

- Integer Linear Program (ILP)
- Comme un LP, sauf qu'on peut exiger que certaines vars soient des entiers.

  ex: $x_i \in \{2, 3, 8, 10\}$

  Pour nous: $x_i \in \{0,1\}$

  Parfois: $x_i \in \mathbb{N}$

ex: Vertex-cover ($X \subseteq V(G)$ t.q. $\forall uv \in E(G)$, $u \in X$ ou $v \in X$) min. $|X|$

Sur entrée $G=(V,E)$

On pose $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$

et pour chaque $v_i \in V$, on crée la variable x_i

avec $x_i \in \{0,1\}$ où

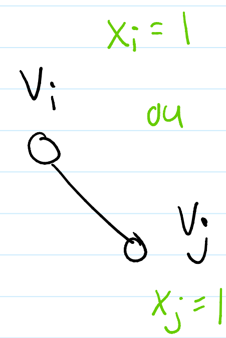
$x_i = 0 \Rightarrow v_i$ pas dans la solution X

$x_i = 1 \Rightarrow v_i$ dans la solution X

minimiser $\sum_{i=1}^{n} x_i$

sujet à $x_i + x_j \geq 1 \quad \forall v_iv_j \in E(G)$

$x_i \in \{0,1\} \quad \forall v_i \in V(G)$



Théorème: $\exists$ algo en temps poly. pour résoudre un LP. } Ellipsoïde, boîte noire

$\nexists$ algo connu en temps poly. pour résoudre un ILP.

Relaxation

Une **relaxation** d'un LP ou d'un ILP, disons L, est un LP L' tel que toute solution faisable pour L est une sol. faisable pour L'.

- faisable pour $L \Rightarrow$ faisable pour L'

  faisable pour $L' \not\Rightarrow$ faisable pour L (pas tjrs)

ex: relaxation du iLP ci-haut

$$\min. \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \,(\cdot w_i)$$

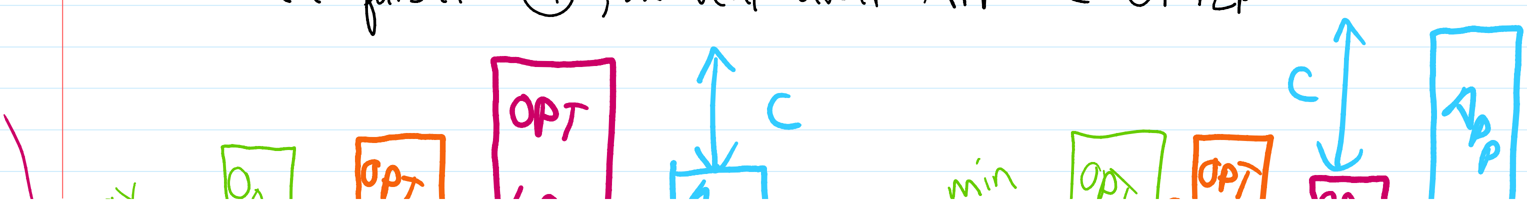
$$\text{sujet à} \quad x_i + x_j \geq 1 \qquad \forall v_i v_j \in E$$

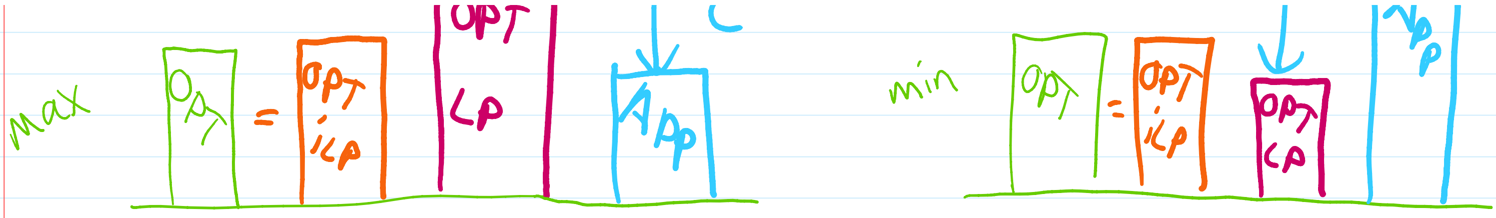
$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall v_i \in V \qquad\qquad x_i \in \{0,1\}$$

- Cadre général d'approx par LP
  1. Exprimer notre pb par un ILP avec $x_i \in \{0,1\}$
  2. Relaxer en LP en mettant $0 \leq x_i \leq 1$
  3. Résoudre le LP, trouver une sol. opt. pour le LP x^*
  4. Convertir x^* en une solution à notre pb

     ↳ fractions → entiers

Ceci fonctionne car $OPT \leq OPT_{LP}$
si le LP est une relaxation (et qu'on maximise)
En faisait (4), on veut avoir $APP \geq c \cdot OPT_{LP}$





$APP \geq \frac{1}{4} OPT_{LP} \geq \frac{1}{4} OPT$

Revenons à Vertex-cover

vcLP$(G=(V,E))$

Soit L' le ILP pour vc ci-haut

Soit L la relaxation avec $0 \leq x_i \leq 1$

$x^* =$ resoudreLP(L)

$X = \emptyset$

pour $i = 1,..,n$

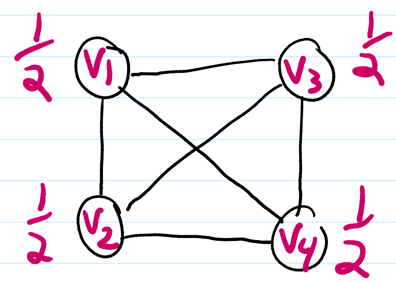
si $x_i^* \geq \frac{1}{2}$, X.add(v_i)

return X

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i$$

s.à $x_i + x_j \geq 1 \quad \forall v_i v_j \in E$

$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall x_i \in V$



$OPT_{LP} = 2 \quad OPT = 3$

$APP = 4$

Thm: vcLP est une 2-approx.

On veut montrer que $App = |X| \leq 2 \cdot OPT_{LP} \leq 2 OPT$ et que X est une solution faisable (ie. un vertex-cover).

- Pour que X soit faisable, il faut que $\forall v_i v_j \in E$, $v_i \in X$, $v_j \in X$.

Supposons que non. Ceci voudrait dire que $\exists v_i v_j \in E$ t.q. $v_i \notin X$, $v_j \notin X$, et donc que $x_i^* < \frac{1}{2}$ et $x_j^* < \frac{1}{2}$

$\exists v_i v_j \in E$ t.q. $v_i \notin X$, $v_j \notin X$, et donc que $x_i^* < \frac{1}{2}$ et $x_j^* < \frac{1}{2}$.

Donc, $x_i^* + x_j^* < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$, et le LP a retourné un $\mathbf{x}^*$ qui ne sat. pas ses contraintes $\Rightarrow$ contradiction.

- $APP = |X| \leq 2 \cdot OPT_{LP}$

Pour chaque $v_i \in X$, on avait $x_i^* \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow |X| = \sum_{v_i \in X} 1 \leq \sum_{v_i \in X} 2 \cdot \frac{1}{2} \leq \sum_{v_i \in X} 2x_i^*$$

$$\leq \sum_{v_i \in V} 2x_i^*$$

$$= 2 \sum_{v_i \in V} x_i^* = 2\, OPT_{LP}$$

$$\leq 2\, OPT. \quad \blacksquare$$