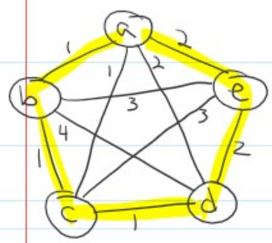
Commis voyageur (métrique)

14 septembre 2021 13:51



coût = 7

Un cycle $C = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ est Hamiltonien si chaque sommet est visité exactement une fois par le cycle (en comptant l'arrivée 1 fois)

Soit $f : E(G) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ une fct de poids aux arêtes.
Le coût de C est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} f(v_i v_{i+1}) + f(v_n v_1)$

On cherche C de coût min.

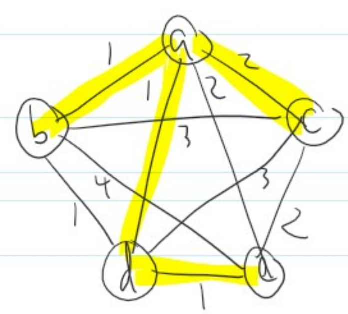
On dit que f est une métrique si $\forall x, y, z \in V(G)$
$f(xz) \leq f(xy) + f(yz)$ (inég. Δ)

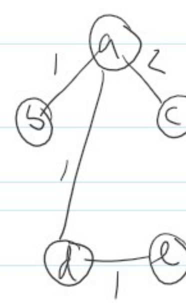
au moins mieux

On donne une 2-approx (avec f une métrique)

1) Borne sur OPT

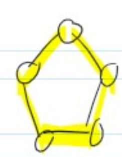
- Un cycle Ham. est un sous-graphe de G qui connecte tous les sommets.
- Un arbre couvrant est aussi un tel sous-graphe.
  ↳ sous-graphe de G qui est un arbre et qui connecte tout $V(G)$





coût = 5

Lemme : soit $ACM(G)$ le coût d'un arbre couvrant de poids min sur G.
Alors $OPT \geq ACM(G)$.



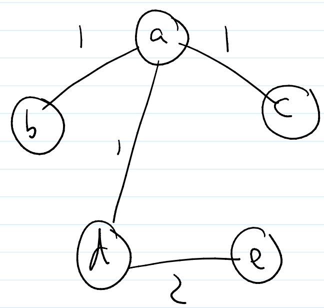
Preuve : soit C un cycle Ham. de poids min et C' obtenu en retirant une arête de C.
Donc $\text{cout}(C) \geq \text{cout}(C')$.
On remarque que C' est un arbre couvrant, et donc $\text{cout}(C') \geq ACM(G)$.

$\Rightarrow OPT = coût(C) \geq coût(C') \geq ACM(G)$. ∎

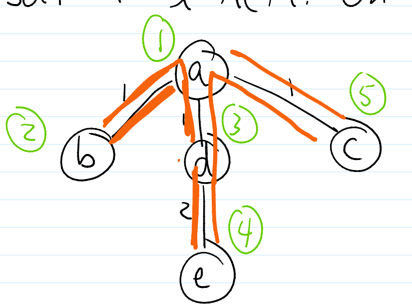
② Utiliser un ACM pour trouver un "bon" cycle Ham.

Disons qu'on a obtenu un ACM (arbre couvrant min)

T



Soit T l'ACM. On enracine T.



```
preOrdre(T, v)
  visiter(v)
  pour chaque enfant
  w de v
    preOrdre(T, w)
```

visite noeud, puis enfants

On fait un parcours préordre de T, on retourne l'ordre des sommets visités, notre cycle Ham.

Ici: (a, b, d, e, c, a)

Voici l'algo:

```
minCommis(G = (V, E), f)
    T = getACM(G, f)
    Enraciner T à un sommet r
    C = preOrdre(T, r)
    C.append(r)   // boucler le cycle
    return C
```

<u>Thm</u>: minCommis est une 2-approx

<u>Preuve</u>: on sait que $OPT \geq coût(T)$

On veut montrer que $coût(C) \leq 2\, coût(T)$.

Preuve : on sait que $OPT \geq \text{coût}(T)$

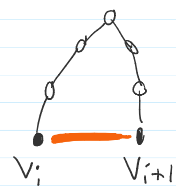
On veut montrer que $\text{coût}(C) \leq 2\,\text{coût}(T)$.

Soit $C = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1)$ et $v_i v_{i+1}$ 2 sommets consécutifs.

Soit $P_{i,i+1}$ le chemin de v_i à v_{i+1} dans T.

Grâce à l'inég. Δ, on a

$$f(v_i, v_{i+1}) \leq \sum_{e \in P_{i,i+1}} f(e)$$



Donc,

$$\text{coût}(C) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i\, v_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \text{coût}(P_{i,i+1})$$

exer. * :

On remarque que dans un parcours pré-ordre, l'union des chemins $P_{i,i+1}$ traverse chaque arête 2 fois.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \text{coût}(P_{i,i+1}) \leq \underbrace{2}_{\text{parce qu'on traverse chaque arête 2 fois.}} \text{coût}(T)$

$$\Rightarrow APP = \text{coût}(C) \leq \sum_{i=1}^{n} \text{coût}(P_{i,i+1}) \leq 2\,\text{coût}(T) \leq 2\,OPT. \blacksquare$$