Intro

31 août 2021 13:10

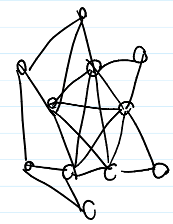
⟷ Dans ce cours

iFT436 - Algos et <u>struct. données</u>
Problèmes "faciles"
$O(n)$ $O(n \log n)$ $O(n^2)$

iFT800: Algo
Problèmes "difficiles"
Pas d'algo en temps poly connu. (NP-complet)

iFT503/711

ex: clique max dans un graphe



ex: faire un horaire qui respecte des contraintes

ex: commis voyageur

que faire?

Algos d'approx
- Algo rapide
- Pas tjrs optimal
- APP $\leq 3 \cdot$ OPT (ex)

1re moitié

Algos faiblement exponentiels
- Complexité paramétrée
- $O(2^k \cdot n)$ où k est un paramètre petit

2e moitié

ex: max clique en $O(2^k \cdot n)$
où k = degré max du graphe

Heuristiques
Algos génétique
Descente de gradient
Algo glouton
...

Cours théorique

- on veut des algo avec garanties démontrable
- applications ≠ algos vus en classe
  applications = TECHNIQUES vues
- "public cible": designer d'algos
  ≠ utilisateurs d'algos

Notions préalables

└ maths discrètes (MAT115)
ex: ensembles, séquence, permut.

└ maths discrètes (MAT115)

ex : ensembles, séquence, permut.

$\cap \quad \cup \quad \setminus \quad \subseteq \quad \emptyset \quad |X| \quad \in$

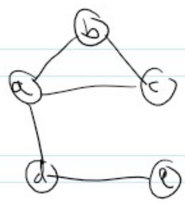
$$|\{X : X \subseteq S\}| = 2^{|S|}$$

└ notation O : évaluer la complexité d'un algo

└ techniques de preuve : directe, induction, contradiction

└ graphes $G = (V, E)$

sommets arêtes



$V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{ab, bc, ac, ad, de\}$

• Faites les exercices !

Exemple d'algo d'approx.

• Il y a n cours à donner en info.

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

u_1 = machine learn.
u_2 = algo
...
u_n = maths discrète

• Pour chaque cours, il faut un prof capable de le donner.

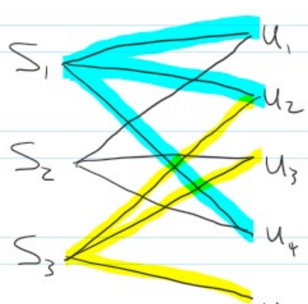
• Chaque prof candidat a 3 expertises

Ensemble des profs

$S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$

où chaque S_i est un ens. de 3 elts de U

<u>But</u> : choisir un # min de profs tel que tous les cours sont couverts.



$S_1 = \{u_1, u_2, u_4\}$

$S_2 = \{u_1, u_3, u_4\}$

$S_3 = \{u_2, u_3, u_5\}$

Sol opt : $\{S_1, S_3\}$

Sol opt : $\{S_1, S_3\}$

3-SET-COVER

Entrée : ensemble $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$
ensemble $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ où
$\forall S_i \in S, |S_i| = 3$ et $S_i \subseteq U$

Sortie : sous-ensemble $S^* \subseteq S$ de taille min. t.q.
$$\bigcup_{S_i \in S^*} S_i = U$$

$3sc(U = \{u_1, \dots, u_n\}, S = \{S_1, \dots, S_m\})$
$S^* = \{\}$
n tours — pour $i = 1..n$
$O(n)$ — si u_i n'est pas couvert par S^*
$O(m)$ — Soit $S' \in S$ t.q. $u_i \in S'$
si S' n'existe pas, return ∞
$O(1)$ — $S^*.\text{insert}(S')$
return S^*

$O(n \cdot (n+m)) = O(n^2 + nm)$

Cet algo est une 3-approx

Soit OPT la valeur d'une sol. optimale.
Soit APP la valeur retournée par l'algo ($|S^*|$)

$\boxed{APP \leq 3 \cdot OPT}$ $\boxed{APP \leq \left(\max_{S' \in S} |S'|\right) \cdot OPT}$

- Borne sur OPT
Il y a n elts à couvrir
Chaque S_i d'une solution couvre au plus 3 elts
$\Rightarrow OPT \geq \lceil n/3 \rceil \geq n/3 \Rightarrow n \leq 3\,OPT$

- Borne sur APP
Au pire, l'algo ajoute un S_i à S^* différent pour

- Borne sur APP

Au pire, l'algo ajoute un S_i à S^* différent pour chaque elt de U. (sauf peut-être le premier S_i qui couvre 3 cours)

$$APP \leq n - 2 \leq n$$

But: $APP \leq 3 \cdot OPT$

$$APP \leq n \leq 3 \cdot OPT$$