IFT800 - Série d'exercices #1

Manuel Lafond

Exercice 1. Le problème SET-COVER est identique au 3-SET-COVER vu en classe, mais les ensembles S qu'on reçoit peuvent avoir des tailles arbitraires. Soit $k = \max_{S' \in S} |S'|$. Donnez une k-approximation pour ce problème.

Exercice 2. Dans le problème MAX-ACYCLIC-SUBGRAPH, on reçoit un graphe *orienté* et on cherche à conserver un nombre maximum d'arêtes pour que le graphe n'ait plus de cycle.

> MAX-ACYCLIC-SUBGRAPH
> **Entrée :** un graphe orienté $G = (V, E)$
> **Sortie :** un ensemble $E' \subseteq E$ de taille maximum tel que $G' = (V, E')$ n'a aucun cycle.

Donnez une 1/2-approximation pour ce problème.

Indice. Ceci est facile, mais seulement quand on a un indice. Je vous invite à tenter l'exercice sans l'indice, puis à revenir ici une fois que vous aurez échoué.

(à lire après votre échec :) Utilisez $OPT \leq |E|$ comme borne. Ensuite, ordonnez les sommets de G de gauche à droite arbitrairement. Considérez les arêtes qui vont de gauche à droite, ou les arêtes qui vont de droite à gauche. Conservez un de ces deux sous-ensembles.

Exercice 3. Considérez l'algorithme glouton pour VERTEX-COVER. Cet algorithme trouve le sommet de degré maximum, l'ajoute à la solution, puis retire le sommet ainsi que toutes ses arêtes. On répète cette procédure jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'arête. Démontrez que ce n'est *pas* une 2-approximation.
Défi. Montrez qu'il existe des instances dans lesquelles cet algorithm retourne une solution telle que $APP \geq O(\log(n))OPT$.
Défi. Montrez que c'est une $O(\log n)$-approximation.

Exercice 4. Montrez que la 2-approximation pour VERTEX COVER des notes de cours est *serrée*.

Exercice 5. Montrez que la 1/2-approximation pour MAX-SAT des notes de cours est *serrée*.

Exercice 6. Montrez que la 2-approximation pour COMMIS-VOYAGEUR des notes de cours est *serrée* (celle-ci est moins facile).

Exercice 7. Soit $k \in \mathbb{N}$ une **constante**. On reçoit un graphe $G = (V, E)$ et on veut savoir s'il existe une couverture par sommet contenant k sommets (donc un ensemble $X \subseteq V(G)$ de taille k qui touche chaque arête). Donnez une 1-approximation pour ce problème.

Indice. Combien de sous-ensembles de k sommets y a-t-il?

Exercice 8. Considérez le problème SET-COVER avec une borne sur le nombre d'occurrences des éléments.

> SET-COVER-k-OCC
> **Entrée :** un univers $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ et des ensembles $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$ de tailles arbitraires tels que pour chaque u_i, il y a au plus k ensembles qui le contiennent
> **Sortie :** un sous-ensemble $S^* \subseteq S$ de taille minimum qui couvre U.

Nous allons développer une k-approximation pour ce problème.

1. Deux éléments u_i, u_j sont appelés indépendants s'il n'existe pas d'ensemble $S_l \in S$ tel que $u_i \in S_l$ et $u_j \in S_l$.

   Soit $X \subseteq U$ tel que chaque paire d'éléments de X sont indépendants. Montrez que $OPT \geq |X|$.

2. Considérez la stratégie suivante: trouver un ensemble X d'éléments indépendants, puis ajouter à votre solution S^* tous les ensembles de S qui contiennent un élément de X.

   Il faut argumenter que trouver un X approprié peut s'implémenter en temps polynomial, donne une solution faisable et donne une solution avec $|S^*| \leq k \cdot OPT$.

   Indice. Trouvez un X indépendant maximal, c'est-à-dire que peu importe quel élément u_j on tente de lui ajouter, $X \cup \{u_j\}$ n'est plus indépendant. Notez que maximal ne veut pas dire maximum.

Exercice 9. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *triangle* est un cycle de longueur 3. On cherche à retirer un nombre minimum d'arêtes pour que G n'ait plus de triangle. Dit autrement, trouver $E' \subseteq E$ de taille minimum tel que $G' = (V, E \setminus E')$ ne contient pas de triangle.

Donnez une 3-approximation pour ce problème.

Indice. Soit U l'ensemble de tous les triangles. Pour chaque arête e, soit S_e l'ensemble des triangles desquels e fait partie. Utilisez le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 10. Considérez le problème MAX-COMMIS-VOYAGEUR, dans lequel on reçoit un graphe complet $G = (V, E)$ et une fonction de poids f sur les arêtes qui est arbitraire, donc qui n'est *pas nécessairement* une métrique. Le but est de trouver un cycle Hamiltonien de poids *maximum*. Donnez une 1/2-approximation pour ce problème.

Suggestion. Il est possible de trouver un matching de poids maximum en temps polynomial.