IFT436 - Série d'exercices #4 : les graphes

Manuel Lafond

Exercice 1: Donnez le code d'un algorithme qui trouve le chemin le plus court d'un sommet u à un sommet v sur un graphe *orienté*.

Exercice 2: Une stratégie naïve pour trouver le chemin le plus court entre deux sommets u et v est d'énumérer *tous* les chemins, et retourner le plus court.
C'est une mauvaise idée.
Pour le voir, montrez qu'il existe au moins $(n-2)!$ chemins entre deux sommets u et v dans un graphe complet.

Pour un peu plus de défi. Notez que le graphe complet a $\Theta(n^2)$ arêtes. Peut-être que sur les graphes avec peu d'arêtes, il y a peu de chemins. Montrez que c'est faux. C'est-à-dire, montrez qu'il existe des graphes avec $O(n)$ arêtes mais $\Omega(2^n)$ chemins entre deux sommets u et v.

Exercice 3: Le *diamètre* d'un graphe est la plus longue distance à parcourir pour aller d'un sommet à un autre (en supposant que l'on prend le chemin le plus court). Formellement, le diamètre s'écrit $diam(G)$ et se définit par

$$diam(G) = \max_{u,v \in V} dist(u, v)$$

où $dist(u, v)$ est la longueur du chemin le plus court entre u et v.
Donnez un algorithme en temps $O(n^2+nm)$ qui trouve le diamètre d'un graphe.

Exercice 4: Donnez un algorithme qui détermine un si graphe G est un arbre.

Exercice 5: Comparez la complexité des opérations "Supprimer une arête" et "Supprimer un sommet" sur une liste d'adjacence et sur une matrice d'adjacence.

Notez que lorsqu'on supprime un sommet, toutes ses arêtes incidentes sont supprimées.

Exercice 6: Démontrez les énoncés suivants sur les arbres.

a. Montrez qu'un arbre avec au moins 2 sommets a au moins 2 feuilles.

b. Montrez que si un arbre T a un sommet de degré k, alors T a au moins k feuilles.

c. Montrez aussi que le seul arbre à n somets deux feuilles est un chemin de longueur $n - 1$.

Exercice 7: Donnez un algorithme qui trouve toutes les composantes fortement connexes d'un graphe orienté. Les composantes fortement connexes sont définies dans le devoir 3.

Exercice 8: Démontrez qu'un graphe orienté G avec n sommets a n composantes fortement connexes si et seulement si G admet un tri topologique.